TRẦN SĨ TÙNG



HỆ PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

TÀI LIỆU ÔN THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG

Năm 2012

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

Giải và biện luận:

– Tính các định thức: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Xét D		Kết quả
$D \neq 0$		*Hệ có nghiệm duy nhất* $\left(x = \dfrac{D_x}{D}; y = \dfrac{D_y}{D}\right)$
$D = 0$	$D_x \neq 0$ *hoặc* $D_y \neq 0$	*Hệ vô nghiệm*
	$D_x = D_y = 0$	*Hệ có vô số nghiệm*

Chú ý: *Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.*

2. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là **khử bớt ẩn** để đưa về các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số, phương pháp thế như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (\sqrt{2}+1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2}-1)y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{3}y = 16 \\ \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{5}y = 11 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$

ĐS:

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{y} = 18 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 51 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 3 \\ \dfrac{9}{x} - \dfrac{10}{y} = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{10}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 1 \\ \dfrac{25}{x-1} + \dfrac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y} + \dfrac{32}{x+3y} = 7 \\ \dfrac{45}{2x-y} - \dfrac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{6}{x-2y} + \dfrac{2}{x+2y} = 3 \\ \dfrac{3}{x-2y} + \dfrac{4}{x+2y} = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y-1} = 3 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y-1} = 4 \end{cases}$

ĐS: a) b) c) d) e) $\left(\dfrac{3}{70}; -\dfrac{87}{140}\right)$ *f)*

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{6x-3}{y-1} - \dfrac{2y}{x+1} = 5 \\ \dfrac{4x-2}{y-1} - \dfrac{4y}{x+1} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-6}{y+1} - \dfrac{x}{y-2} = 1 \\ \dfrac{x-2}{y+1} + \dfrac{3x}{y-2} = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{y+7}{y+3} = 5 \\ \dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{3y+1}{y+3} = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x+y)+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=6 \\ 3(x-y)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{3(x+y)}{x-y}=-7 \\ \frac{5x-y}{y-x}=\frac{5}{3} \end{cases}$ f)

ĐS: a) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ *b)* $\left(\frac{5}{8};\frac{7}{4}\right)$ *c)* *d)* $(1;1),\left(1;-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3};1\right),\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2+2x-\sqrt{y-1}=3 \\ x^2+x+2\sqrt{y-1}=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+3y=1 \\ 2x^2-7y=15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(4-x^2)+\frac{5}{\sqrt{y}}=2 \\ 4-x^2+\frac{2}{\sqrt{y}}=4 \end{cases}$

ĐS: a) $(1;2),(-2;2)$ *b)* $(\pm 2;-1)$ *c)*

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} |x-1|+y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1 \\ |x-1|+y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=2 \\ |2x-3y|=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2|x-6|+3|y+1|=5 \\ 5|x-6|-4|y+1|=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2|x+y|-|x-y|=9 \\ 3|x+y|+2|x-y|=17 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4|x+y|+3|x-y|=8 \\ 3|x+y|-5|x-y|=6 \end{cases}$

ĐS:

Bài 6. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx+(m-1)y=m+1 \\ 2x+my=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+(m-2)y=5 \\ (m+2)x+(m+1)y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (m-1)x+2y=3m-1 \\ (m+2)x-y=1-m \end{cases}$

Bài 7. Trong các hệ phương trình sau hãy:

i) Giải và biện luận. ii) Tìm $m \in Z$ để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

a) $\begin{cases} (m+1)x-2y=m-1 \\ m^2x-y=m^2+2m \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx-y=1 \\ x+4(m+1)y=4m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+y-3=3 \\ x+my-2m+1=0 \end{cases}$

Bài 8. Trong các hệ phương trình sau hãy:

i) Giải và biện luận.

ii) Khi hệ có nghiệm $(x;y)$, tìm hệ thức giữa x, y độc lập đối với m.

a) $\begin{cases} mx+2y=m+1 \\ 2x+my=2m+5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6mx+(2-m)y=3 \\ (m-1)x-my=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+(m-1)y=m+1 \\ 2x+my=2 \end{cases}$

Bài 9. Trong các hệ phương trình sau:

i) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

ii) Khi hệ có nghiệm (x, y), tìm hệ thức giữa x, y độc lập với m.

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2y-x=10m+5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+y=3m \\ x+my=2m+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=4-m \\ 2x+y=3m+3 \end{cases}$

Bài 10. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} ax+y=b \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y-ax=b \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax+y=a+b \\ x+2y=a \end{cases}$

Bài 11. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=5 \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y+2z=8 \\ 2x+y+z=6 \\ 3x+y+z=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y+2z=-7 \\ -2x+4y+3z=8 \\ 3x+y-z=5 \end{cases}$

ĐS:

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

1. Hệ gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tuỳ theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

2. Hệ đối xứng loại 1

Hệ có dạng: (I) $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ (với *f(x, y) = f(y, x)* và *g(x, y) = g(y, x)*).

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa *x* và *y* thì *f(x, y)* và *g(x, y)* không thay đổi).

- Đặt $S = x + y$, $P = xy$.
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (II) với các ẩn là *S* và *P*.
- Giải hệ (II) ta tìm được S và P.
- Tìm nghiệm (*x, y*) bằng cách giải phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

3. Hệ đối xứng loại 2

Hệ có dạng: (I) $\begin{cases} f(x,y)=0 & (1) \\ f(y,x)=0 & (2) \end{cases}$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa *x* và *y* thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

- Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)-f(y,x)=0 & (3) \\ f(x,y)=0 & (1) \end{cases}$$

- Biến đổi (3) về phương trình tích:

$$(3) \Leftrightarrow (x-y).g(x,y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ g(x,y)=0 \end{array}\right.$$

- Như vậy: $\text{(I)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y)=0 \\ x=y \end{cases} \\ \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \end{array}\right.$.
- Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

Chú ý: *Với các hệ phương trình đối xứng, nếu hệ có nghiệm* $(x_0;y_0)$ *thì* $(y_0;x_0)$ *cũng là nghiệm của hệ. Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất thì* $x_0 = y_0$.

4. Hệ đẳng cấp bậc hai

Hệ có dạng: (I) $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}$.

- Giải hệ khi $x = 0$ (hoặc $y = 0$).
- Khi $x \neq 0$, đặt $y = kx$. Thế vào hệ (I) ta được hệ theo *k* và *x*. Khử *x* ta tìm được phương trình bậc hai theo *k*. Giải phương trình này ta tìm được *k*, từ đó tìm được (*x; y*).

VẤN ĐỀ 1: Hệ gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+4y^2=8 \\ x+2y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-xy=24 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (x-y)^2=49 \\ 3x+4y=84 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6 \\ x-2y=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x-4y+1=0 \\ xy=3(x+y)-9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ xy+x+y+6=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y+x^2=4x \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x^2-y^2+2y=4 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

ĐS:

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ y^2-x^2+2x+2y+4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+9y=6 \\ 3x^2+6xy-x+3y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2+x+y+1=0 \\ x^2+12x+2y+10=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+2y+1)(x+2y+2)=0 \\ xy+y^2+3x+1=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} (2x+3y-2)(x-5y-3)=0 \\ x-3y=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+11=5y^2 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

ĐS:

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2=7y+12y-1 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9x^2+4y^2+6xy+42x-40y+135=0 \\ 3x-2y+9=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+xy+x=10 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x^2+9y^2-12xy+5x+3y+5=0 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2+2x+3y-6=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

ĐS:

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-1}-\dfrac{x-y}{2y}=2 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{9x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+y)^2+4(x+y)^2-117=0 \\ x-y=25 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^3-y^3=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45 \\ x+y=5 \end{cases}$

ĐS:

Bài 5. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2+y^2=m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=m \\ x^2-y^2+2x=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ x^2+y^2=m \end{cases}$

ĐS:

VẤN ĐỀ 2: Hệ đối xứng loại 1

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2+y^2-xy-2(x+y)=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+y^2+x+y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+y+xy=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481 \\ x^2+xy+y^2=37 \end{cases}$

ĐS: a) $(2;3),(3;2)$ *b)* $(1;3),(3;1)$ *c)* $(1;2),(2;1)$

d) $\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{8}{5}\right),\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{12}{5}\right)$ *e)* $(1;2),(2;1)$ *f)* $(4;3),(3;4),(-4;-3),(-3;-4)$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+xy+y=-1 \\ x^2y+y^2x=-6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2y+y^2x=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+y^2+3(x+y)=28 \end{cases}$

ĐS: a) *b)* *c)* $(2;3),(3;2)$

d) *e)* *f)*

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+xy-y=5 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x+xy+y=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+y^2+3(x+y)=28 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 2x+xy+2y=-3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$

ĐS: a) $(1;1)$ *b)* *c)*

d) *e)* *f)* $(1;2),(2;1)$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (x+y)(8+xy)=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^5+y^5=1 \\ x^9+y^9=x^4+y^4 \end{cases}$

ĐS: a) *b)* *c)*

d) *e)* *f)*

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+x+y^2+y=18 \\ x(x+1).y(y+1)=72 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(x+2)(2x+y)=9 \\ x^2+4x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+\dfrac{x}{y}=3 \\ \dfrac{(x-y)x}{y}=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}+xy=11 \end{cases}$

ĐS: a) $(3;-3),(-3;3),(2;3),(3,2),(-4;-3),(-3;-4),(2;-4),(-4;2)$ *b)*

c) *d)* *e)* *f)* $(2;3),(3;2)$

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y(x^2+1)=2x(y^2+1) \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{2}{3} \\ (x+y)(1+\dfrac{1}{xy})=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^2y+y^2x+2y+x=6xy \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} xy+\dfrac{1}{xy}=4 \\ (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \end{cases}$

ĐS: a) $\left(\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2};-1\right),\left(-1;\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}\right)$ *b)* *c)* $(1;1)$

d) *e)* *f)*

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3xy-(x^2+y^2)=5 \\ 7x^2y^2-(x^4+y^4)=155 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \\ x+y-\sqrt{xy}=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=49 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \\ x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=6 \end{cases}$

ĐS: a) *b)* $(4;9),(9;4)$ *c)*

d) *e)* *f)*

Bài 8. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y+xy=m \\ x^2+y^2=3-2m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=m+1 \\ x^2y+xy^2=2m^2-m-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (x+1)(y+1)=m+5 \\ xy(x+y)=4m \end{cases}$

VẤN ĐỀ 3: Hệ đối xứng loại 2

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 5y + 4 \\ y^2 - 2x^2 = 5x + 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ xy + y^2 = 8(x-1) \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

ĐS: a) *b)* *c)*
d) *e)* *f)*

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 = x + 2y + 4 \\ y^2 = y + 2x + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy + x^2 = 1 - y \\ xy + y^2 = 1 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^3 + 4x = y + \dfrac{3}{2} \\ y^3 + 4y = x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

ĐS: a) *b)* *c)*
d) *e)* $(0;0)$ *f)*

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4\dfrac{x}{y} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{3}{x^2} \\ 2y + x = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$ f)

ĐS: a) *b)* *c)* $(1;1)$
d) *e)*

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-7} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-7} = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{6-y} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{y} + \sqrt{6-x} = 2\sqrt{3} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+5} = 7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{x^2+91} = \sqrt{y-2} + y^2 \\ \sqrt{y^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2 \end{cases}$

ĐS: a) $(3;3), \left(\dfrac{11}{9}; \dfrac{11}{9}\right)$ *b)* $(8;8)$ *c)*
d) *e)* *f)* $(3;3)$

Bài 5. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 = 3x + my \\ y^2 = 3y + mx \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(3-4y^2) = m(3-4m^2) \\ y(3-4x^2) = m(3-4m^2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1) \end{cases}$

Bài 6. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} x^2y + m = y^2 \\ xy^2 + m = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{m^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{m^2}{x} \end{cases}$

VẤN ĐỀ 4: Hệ đẳng cấp bậc hai

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y^2 - 3xy = 4 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$

ĐS: a) b) c)
d) e) f)

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 5y^2 = 37 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 4xy + 2y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 2x^2 + xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = -2 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9y^2 + 11xy - 8x^2 = 13 \end{cases}$

ĐS: a) b) c)
d) e) f)

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x-y) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^3 - x^3 = 7 \\ 2x^2y + 3xy^2 = 16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 - xy^2 + y^3 = 1 \\ 2x^3 - x^2y + y^3 = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3 = 6 \\ 3y^3 + x^2y - 2xy^2 = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases}$

ĐS: a) b) c)
d) e) f)

Bài 4. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 + mxy + y^2 = m \\ x^2 + (m-1)xy + my^2 = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy - y^2 = 12 \\ x^2 - xy = m + 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH DẠNG KHÁC

Vấn đề 1: Phương pháp thế

Từ phương trình đơn giản nhất của hệ hoặc từ phương trình tích tìm cách rút một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình còn lại. Giải phương trình này. Số nghiệm của hệ tuỳ thuộc số nghiệm của phương trình này.
Một số dạng thường gặp:
- ***Dạng 1**: Trong hệ có một phương trình bậc nhất với ẩn x (hoặc y).*
- ***Dạng 2**: Trong hệ có một phương trình có thể đưa về dạng tích của các biểu thức bậc nhất hai ẩn.*
- ***Dạng 3**: Trong hệ có một phương trình có thể đưa về dạng phương trình bậc hai của một ẩn với ẩn còn lại là tham số.*

***Chú ý:** Đôi khi có thể ta phải kết hợp biến đổi cả 2 phương trình của hệ để đưa về một trong các dạng trên.*

Bài 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+5x+y=9 \\ 3x^3+x^2y+2xy+6x^2=18 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x^2-5x \\ x^4+4x^3-5x^2-18x+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x^2-5x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \\ x=-1\pm\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ y=3 \\ x=-3;\ y=15 \\ x=-1-\sqrt{7};\ y=6+3\sqrt{7} \\ x=-1+\sqrt{7};\ y=6-3\sqrt{7} \end{array}\right.$

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} 2x^2y+3xy=4x^2+9y \\ 7y+6=2x^2+9x \end{cases}$. *Nghiệm* $\left(-2;-\frac{16}{7}\right),\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{7}\right),\left(\frac{-9\pm3\sqrt{33}}{4};3\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ 2x^3=x+y \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^6-6x^4+3x^2-1=0 \\ y=2x^3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Nghiệm: $(1;1),(-1;-1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 & (1) \\ x^2+2xy=6x+6 & (2) \end{cases}$

• *Từ (2), rút* $xy=\frac{6x+6-x^2}{2}$. *Thay vào (1) ta được:* $x(x+4)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Nghiệm: $\left(-4;\frac{17}{4}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 11 & (1) \\ y^2 - 2xy = 5 & (2) \end{cases}$

• *Dễ thấy* $y \neq 0$. *Từ (2), rút* $x = \dfrac{y^2 - 5}{2y}$.

Thay vào (1) ta được: $\left(\dfrac{y^2-5}{2y}\right)^2 - 3\dfrac{y^2-5}{2y}y + y^2 = 11 \Leftrightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Nghiệm: $(2;-1), (-2;1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$

• *Dễ thấy y ≠ 0. HPT* $\Rightarrow [4y - y(y+x)](y+x-2) = y \Leftrightarrow [y-(3-x)]^2 = 0 \Leftrightarrow y = 3 - x$

Nghiệm: $(1;2),\ (-2;5)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x+1 \\ y = -x-1 \end{array}\right.$

Nghiệm:

Bài 7. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + x + 2y = 1 - 3xy & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow (x+y)(x+3y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y \\ x = -3y \end{array}\right.$

Nghiệm: $(3;-1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x + 3y - 2 = 0 & (1) \\ 3x^2 - 32y^2 + 5 = 0 & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow 2(x+y)^2 + 3(x+y) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = -2 \\ x + y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Nghiệm:

Bài 9. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 = y^3 - 3x - 1 & (1) \\ x^2 + xy + y = 5 & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = y^3 \Leftrightarrow (x+1)^3 = y^3 \Leftrightarrow y = x + 1$

Nghiệm: $(1;2), (-2;-1)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{2x^2 + 4xy + 1}{x + 2y} = -5 & (1) \\ \dfrac{x}{x+2y} = -3 & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow 2x + \dfrac{1}{x+2y} = -5$. *Thay vào (2) ta được:* $2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3\ (y = 2) \\ x = \dfrac{1}{2}\ \left(y = -\dfrac{1}{3}\right) \end{array}\right.$

Nghiệm: $(-3;2),\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2(x^2+y^2)=1 & (1) \\ 2x^3+6xy^2=1 & (2) \end{cases}$

• *HPT* $\Rightarrow 2x(x^2+y^2)+4xy^2=1 \Leftrightarrow x+4xy^2=1 \Leftrightarrow xy^2=\frac{1}{4}(1-x)$ *(*)*

Thay vào (2) ta được: $4x^3-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Nghiệm:

Bài 12. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2+4xy-2x-y+2=0 & (1) \\ 3x^2+6xy-x+3y=0 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(2)-(1)$ *ta được:* $x^2+(2y+1)x+4y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1-y \end{array}\right.$

Nghiệm:

Bài 13. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2(1+y^2)=2 \\ x^2y^2+xy=3x^2-1 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x^2y^2=2 & (1) \\ x^2y^2+xy=3x^2-1 & (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)-(2)$ *ta được:* $x^2-xy=3-3x^2 \Leftrightarrow xy=4x^2-3$.

Thay vào (1) ta được: $16x^4-23x^2+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=\frac{7}{16} \end{array}\right.$.

Nghiệm:

Bài 14. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=2(x^2+y^2) & (1) \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=y^2-x^2 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)\pm(2)$ *ta được:* $\begin{cases} \frac{2}{x}=x^2+3y^2 \\ \frac{1}{y}=3x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3xy^2=2 & (3) \\ y^3+3x^2y=1 & (4) \end{cases}$

Lấy $(3)\pm4$ *ta được:* $\begin{cases} (x+y)^3=3 \\ (x-y)^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{3} \\ x-y=1 \end{cases}$

Nghiệm: $\left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2};\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+4xy=6 & (1) \\ 2x^2+8=3y+7x & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+(2)$ *ta được:* $3x^2+(4y-7)x+y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-y \\ x=\frac{1-y}{3} \end{array}\right.$.

Nghiệm:

Bài 16. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 & (1) \\ x^2 + 2xy - 7x - 5y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+(2)$ *ta được:* $(2x + y - 3)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 - 2x \\ y = 2 - x \end{array}\right.$

Nghiệm: $(1;1), (2;-1)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\dfrac{1}{4} + 3\sqrt{3} & (1) \\ y^4 + 2x^3 - y = -\dfrac{1}{4} - 3\sqrt{3} & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+(2)$ *ta được:* $x^4 + 2x^3 - x + y^4 + 2y^3 - y = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - (x^2 + x) + \dfrac{1}{4} + (y^2 + y)^2 - (y^2 + y) + \dfrac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y^2 + y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Nghiệm: $\left(\dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4z^2 + 12 = 0 & (1) \\ y^2 - 4yz + x^2 - 12 = 0 & (2) \\ 16z^2 - 8xz + 4y^2 = 0 & (3) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+(2)+(3)$ *ta được:* $(x - 2y)^2 + (4z - x)^2 + (y - 2z)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 4z \\ y = 2z \end{cases}$

Thay vào HPT ta được: $z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$.

Nghiệm: $(4;2;1), (-4;-2;-1)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 & (1) \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1) - 3\times(2)$, *ta được* $(x - 2)^3 = (3 + y)^3 \Rightarrow x = y + 5$.

Nghiệm: $(3;-2), (2;-3)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1) - 3\times(2)$, *ta được* $(x - 1)^3 = (2 - y)^3 \Rightarrow x = 3 - y$.

Nghiệm: $(2;1), (1;2)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 & (1) \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1) - 3\times(2)$, *ta được* $(x - 4)^3 = (3 - y)^3 \Rightarrow x = 7 - y$.

Nghiệm: $(3;4), (4;3)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy-3x-2y=16 & (1) \\ x^2+y^2-2x-4y=33 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $2\times(1)+(2)$, *ta được* $(x+y)^2-8(x+y)-65=0 \Leftrightarrow (x+y+5)(x+y-13)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+5=0 \\ x+y-13=0 \end{array}\right.$$

Nghiệm:

Bài 23. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2xy+3x+4y=-6 & (1) \\ x^2+4y^2+4x+12y=3 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $2\times(1)+(2)$, *ta được* $(x+2y)^2+10(x+2y)+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=-1 \\ x+2y=-9 \end{array}\right.$

Nghiệm:

Bài 24. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+xy-y^2+3y+4=0 & (1) \\ x^2+2xy-2y^2+11x+6y-2=0 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $2\times(1)-(2)$, *ta được* $x^2-11x+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=10 \end{array}\right.$

Nghiệm:

Bài 25. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y(3x+1) & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)\times 25+(2)\times 50$, *ta được* $25(3x+y)^2+50(3x+y)-119=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+y=\dfrac{7}{5} \\ 3x+y=-\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$

Nghiệm: $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25};\dfrac{2}{25}\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+3\times(2)$ *ta được:* $(x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1, y=4 \end{array}\right.$

Nghiệm: $(-1;4),(-1;-4)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 6x^2y+2y^3+35=0 & (1) \\ 5x^2+5y^2+2xy+5x+13y=0 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+3\times(2)$ *ta được:* $(2y+5)\left[3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Nghiệm: $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 & (1) \\ y^2+xy+3y+1=0 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+2\times(2)$ *ta được:* $(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y+1=0 \\ x+2y+2=0 \end{array}\right.$

Nghiệm: $(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2}),(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2})$, $\left(-3+\sqrt{5};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(-3-\sqrt{5};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^4-y^4=240 & (1) \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)-8\times(2)$ *ta được:* $(x-2)^2=(y-4)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=6-y \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(4;2),(-4;-2)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+3y=9 & (1) \\ y^4+4(2x-3)y^2-48y-48x+155=0 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $16\times(1)+(2)$ *ta được:* $\left[y^2+2(2x-3)\right]^2=25$

Nghiệm:

Bài 31. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^3+3x^2y=5 & (1) \\ y^3+6xy^2=7 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $4\times(1)+(2)$ *ta được:* $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3=27 \Leftrightarrow (2x+y)^3=27 \Leftrightarrow 2x+y=3$

Nghiệm: $(1;1),\left(\dfrac{5-\sqrt{105}}{8};\dfrac{7+\sqrt{105}}{4}\right),\left(\dfrac{5+\sqrt{105}}{8};\dfrac{7-\sqrt{105}}{4}\right)$.

Bài 32. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-y^3=9 & (1) \\ x^2+2y^2-x+4y=0 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)-3\times(2)$ *ta được:* $(x-1)^3=(y+2)^3 \Leftrightarrow x=y+3$.

Nghiệm: $(2;-1),(1;-2)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3(x^3-y^3)=4xy & (1) \\ x^2y^2=9 & (2) \end{cases}$

• *Từ (2):* $x^2y^2=9 \Leftrightarrow xy=\pm 3$.

• *Khi:* $xy=3$, *ta có:* $x^3-y^3=4$ *và* $x^3.\left(-y^3\right)=-27$

Suy ra: $x^3;(-y^3)$ *là các nghiệm của phương trình:* $X^2-4X-27=0 \Leftrightarrow X=2\pm\sqrt{31}$

Vậy nghiệm của Hệ PT là $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}, y=-\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}$

hoặc $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}, y=-\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}$.

• *Khi:* $xy=-3$, *ta có:* $x^3-y^3=-4$ *và* $x^3.\left(-y^3\right)=27$

Suy ra: $x^3;(-y^3)$ *là nghiệm của phương trình:* $X^2+4X+27=0$ *(PTVN)*

Bài 34. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} & (1) \\ 2y=x^3+1 & (2) \end{cases}$ (A - 2003)

• *Điều kiện: xy ≠ 0. Ta có: (1)* $\Leftrightarrow (x-y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=-1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = y \\ 2x = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x-1)(x^2+x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{x} \\ -\dfrac{2}{x} = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{x} \\ x^4 + x + 2 = 0 \ (VN) \end{cases}$

Nghiệm $(1;1), \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\right)$.

Bài 35. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$

• *Dễ thấy* $x = 0$ *không thoả mãn (2) nên (2)* $\Leftrightarrow y + 1 = \dfrac{x^2-1}{x}$*, thay vào (1) ta được:*

$$x^2.\frac{x^2-1}{x}\left(x + \frac{x^2-1}{x}\right) = 3x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2.$$

$\Rightarrow$ *Hệ có nghiệm:* $(1;-1), \left(-2; -\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 36. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$

• *Từ (1)* $\Rightarrow y^2 = -5x^2 + 16x + 16$.

Thay vào (2) ta được: $2y^2 - 4xy - 8y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{array} \right.$

• *Với y = 0* $\Rightarrow -5x^2 + 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{5} \\ x = 4 \end{array} \right.$

• *Với* $y = 2x + 4 \Rightarrow (2x+4)^2 = -5x^2 + 16x + 16 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4$.

Kết luận: Nghiệm (x; y): $(0;4), (4;0), \left(-\dfrac{4}{5}; 0\right)$.

Bài 37. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy + x - 7y = -1 & (1) \\ x^2y^2 + xy - 13y^2 = -1 & (2) \end{cases}$

• *Từ (1)* $\Rightarrow xy + 1 = 7y - x$. *Thay vào (2) ta được:* $x^2 - 15xy + 36y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 12y \end{array} \right.$

Nghiệm: $(3;1), \left(1; \dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 38. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 & (1) \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 & (2) \end{cases}$

• *Từ (1)* $\Rightarrow x = \dfrac{7y+1}{y-1}$. *Thay vào (2) ta được:* $\left(\dfrac{7y+1}{y-1}\right)^2 y^2 = 10y^2 - 1$

$$\Leftrightarrow 39y^4+34y^3-8y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1\ (x=3) \\ y=-\dfrac{1}{3}\ (x=1) \end{array}\right.$$

Nghiệm: $(3;-1),\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 39. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y^2-xy+1=0 & (1) \\ x^2+y^2+2x+2y+1=0 & (2) \end{cases}$

• *Từ (1)* $\Leftrightarrow y^2+1=xy$. *Thay vào (2) ta được:* $(x+2)(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-y \end{array}\right.$

Nghiệm: $(-2;-1)$.

Bài 40. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 & (1) \\ x^2y+x^2+2y-22=0 & (2) \end{cases}$

• *Từ (2)* $\Rightarrow y=\dfrac{22-x^2}{x^2+2}$. *Thay vào (1) ta được:*

$$x^4-4x^2+\left(\frac{22-x^2}{x^2+2}-3\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-4)+\frac{16(x^2-4)^2}{(x^2+2)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^6+4x^4+20x^2-64)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-2 & (y=3) \\ x=2 & (y=3) \\ x=-\sqrt{2} & (y=5) \\ x=\sqrt{2} & (y=5) \end{array}\right.$$

Bài 41. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+2y^2=xy+2y & (1) \\ 2x^3+3xy^2=2y^2+3x^2y & (2) \end{cases}$

• *Với* $y=0 \Rightarrow x=0$ *là nghiệm của hệ.*

Với $y\neq 0$, *nhân (1) với* $-y$ *rồi cộng với (2), ta được:*

$$2x^3-4x^2y+4xy^2-2y^3=0 \Leftrightarrow x=y$$

Nghiệm: $(1;1),(0;0)$.

Bài 42. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x-1)^2+6(x-1)y+4y^2=20 & (1) \\ x^2+(2y+1)^2=2 & (2) \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+9}{3x-5} \\ x^2+4y^2=1-4y \end{cases}$.

Nghiệm: $(-1;-1)$.

Bài 43. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=3 & (1) \\ y-\dfrac{y-3x}{x^2+y^2}=0 & (2) \end{cases}$

• + *Với* $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0;1)$ *là 1 nghiệm của HPT.*

+ *Với* $y=0$ *không thoả HPT.*

+ *Với* $x\neq 0, y\neq 0$ *ta có: (1)* $\Leftrightarrow xy+\dfrac{xy+3y^2}{x^2+y^2}=3y$ *(3)*

$$(2) \Leftrightarrow xy - \frac{xy-3x^2}{x^2+y^2} = 0 \qquad (4)$$

Lấy $(3)+(4)$ *ta được:* $2xy+3=3y \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\left(\frac{y-1}{y}\right)$

Nghiệm:

Bài 44. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 8x^6 - \frac{1}{2}xy = y - 3x^4 & (1) \\ x^3 - 4x^2y = y & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow y = \frac{8x^6+3x^2}{x+2}$; *(2)* $\Leftrightarrow y = \frac{x^3}{4x^2+1}$

Từ đó: $\frac{8x^6+3x^2}{x+2} = \frac{x^3}{4x^2+1} \Rightarrow x^3(64x^6+16x^4+23x^2-2x+6)=0 \Rightarrow x=0 (y=0)$

Nghiệm: $(0;0)$.

Bài 45. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$ (D – 2009)

• *Vì x ≠ 0 nên HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{x}-1 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{x}-1 \\ \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x}+2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=1 \\ x+y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{2} \\ x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$. *Nghiệm:* $(1;1), \left(2;-\frac{3}{2}\right)$.

Bài 46. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-8x = y^3+2y \\ x^2-3 = 3(y^2+1) \end{cases}$ (DB A – 2006)

• *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3-y^3) = 6(4x+y) & (1) \\ x^2-3y^2=6 & (2) \end{cases}$.

Thế (2) vào (1) ta được: $3(x^3-y^3) = (x^2-3y^2)(4x+y) \Leftrightarrow x^3+x^2y-12xy^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3y \\ x=-4y \end{array}\right.$.

Nghiệm (x; y): $(3;1), (-3;-1), \left(-4.\sqrt{\frac{6}{13}};\sqrt{\frac{6}{13}}\right), \left(4.\sqrt{\frac{6}{13}};-\sqrt{\frac{6}{13}}\right)$.

Bài 47. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-y^3=7 \\ xy(x-y)=2 \end{cases}$

• *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^3-y^3)=14 & (1) \\ xy(x-y)=2 & (2) \end{cases}$.

Thay (2) vào (1) ta được: $(x-y)(2x^2-5xy+2y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=2y \\ y=2x \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(2;1),(-1;-2)$.

Bài 48. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) & (1) \\ x^2-xy+y^2=3 & (2) \end{cases}$

• *Thay (2) vào (1) ta được:* $2x^3-9y^3=x^3-y^3 \Leftrightarrow x=2y$

Nghiệm: $(2;1),(-2;-1)$.

Bài 49. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x & (1) \\ 1+y^2=5(1+x^2) & (2) \end{cases}$

• *Từ (2) suy ra* $y^2-5x^2=4$ *(3). Thế vào (1) được:*

$$x^3+\left(y^2-5x^2\right).y=y^3+16x \Leftrightarrow x^3-5x^2y-16\,x=0 \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-5xy-16=0 \end{array}\right.$$

• *Với* $x=0 \Rightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2$.

• *Với* $x^2-5xy-16=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-16}{5x}$ *(4). Thế vào (3) được:*

$$\left(\frac{x^2-16}{5x}\right)^2-5x^2=4 \Leftrightarrow x^4-32x^2+256-125x^4=100x^2$$

$$\Leftrightarrow 124\,x^4+132x^2-256=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (y=-3) \\ x=-1 & (y=3) \end{array}\right..$$

Vậy hệ có 4 nghiệm: (x; y) = (0; 2) ; (0; –2); (1; –3); (–1; 3)

Bài 50. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (2x^2+y)(x+y)+x(2x+1)=7-2y & (1) \\ x(4x+1)=7-3y & (2) \end{cases}$

• *Thế* $7=4x^2+x+3y$ *ở (2) vào (1) ta được:* $(2x^2+y)(x+y)=2x^2+y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2x^2 \\ y=1-x \end{array}\right.$

Nghiệm: $\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4};\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4};\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$.

Bài 51. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+7y=(x+y)^2+x^2y+7x+4 & (1) \\ 3x^2+y^2+8y+4=8x & (2) \end{cases}$

• *Ta có: (2)* $\Leftrightarrow 4=8x-3x^2-y^2-8y$.

Thay vào (1) ta được: $(x-y)(x^2+2x-15)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(3;-1),(3;-7)$.

Bài 52. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 & (1) \\ 4x^4+y^4-4x-y=0 & (2) \end{cases}$

• *Thay (1) vào (2) ta được:* $4x^4+y^4=(4x+y)(x^3+y^3-xy^2)$

$$\Leftrightarrow xy(3y^2 - 4xy + x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x = y \\ x = 3y \end{array}\right.$$

Nghiệm: $(0;1),(1;0),(1;1),\left(\frac{3}{\sqrt[3]{25}};\frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$.

Bài 53. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 & (1) \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x & (2) \end{cases}$

• *Thay (1) vào (2) ta được:*

$$2x^3 - y^3 = (2y - x)(2y^2 - x^2) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0 \qquad (3)$$

Dễ thấy $y \neq 0$. *Đặt* $t = \frac{x}{y}$, *ta có (3)* $\Leftrightarrow t^3 + 2t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = y$.

Nghiệm: $(1;1),(-1;-1)$.

Bài 54. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 & (2) \end{cases}$

• *Thay (1) vào (2) ta được:*

$$x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2(x^3 + y^3) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0 \qquad (3)$$

Dễ thấy $y \neq 0$. *Đặt* $t = \frac{x}{y}$, *ta có (3)* $\Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \\ 2x = y \end{array}\right.$.

Nghiệm: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

Bài 55. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + y^3 + 2xy(x + y) = 6 \\ x^5 + y^5 + 30xy = 32 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 + 2xy(x + y) = 6 & (1) \\ x^5 + y^5 + 6.5xy = 32 & (2) \end{cases}$. *Thay (1) vào (2) ta được:*

$$x^5 + y^5 + 5\left[x^3 + y^3 + 2xy(x + y)\right]xy = 32 \Leftrightarrow (x + y)^5 = 32 \Leftrightarrow x + y = 2$$

Nghiệm:

Bài 56. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(x + y) = 6 \\ x^3 + y^3 + 18y = 27 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x + y) = 6 & (1) \\ x^3 + y^3 + 6.3y = 27 & (2) \end{cases}$. *Thay (1) vào (2) ta được:*

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 27 \Leftrightarrow (x + y)^3 = 27 \Leftrightarrow x + y = 3$$

Nghiệm:

Bài 57. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^3 + y^3 + xy^2 = x + 2y & (2) \end{cases}$

• *Thay (1) vào (2) ta được:* $x^3 + xy^2 = x + x^2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + xy \Rightarrow xy = 1$

Nghiệm: $(-1;-1),(1;1)$.

Bài 58. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 & (1) \\ 8y^2 + x^2 = 12 & (2) \end{cases}$

• *Thay (2) vào (1) ta được:* $x^3 + 2xy^2 + (8y^2 + x^2)y = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0$ *(3)*
Dễ thấy $y = 0$ *không thoả HPT.*

Với $y \neq 0$, *đặt* $t = \dfrac{x}{y}$ *ta được: (3)* $\Leftrightarrow t^3 + t^2 + 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow x = -2y$

Nghiệm: $(2;-1), (-2;1)$.

Bài 59. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ xy + x^2 = 2 & (2) \end{cases}$

• *Thay (1) vào (2) ta được:* $xy + x^2 = 2(2x^2 - y^2) \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 - xy = 0$ *(3)*
Dễ thấy $x = 0$ *không thoả HPT.*

Với $x \neq 0$, *đặt* $t = \dfrac{y}{x}$ *ta được: (3)* $\Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -\dfrac{3}{2}x \end{array}\right.$

Nghiệm: $(-1;-1), (1;1)$.

Bài 60. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x+y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 6 & (1) \\ (x^2+y^2)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right)^2 = 18 & (2) \end{cases}$

• *Bình phương (1) rồi chia vế theo vế, được* $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x = y$

Nghiệm:

Bài 61. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy(2x + y - 6) + 2x + y = 0 \\ (x^2+y^2)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right)^2 = 8 \end{cases}$

• *Điều kiện:* $xy \neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)(xy+1) = 6xy & (1) \\ (x^2+y^2)(1+xy)^2 = 8x^2y^2 & (2) \end{cases}$

Bình phương (1) rồi chia vế theo vế, được $\dfrac{(2x+y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7y \\ x = y \end{array}\right.$.

Nghiệm:

Bài 62. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{698}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

• *Ta có: (2)* $\Leftrightarrow x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0$.
Để PT này có nghiệm đối với x thì ta phải có:

$$\Delta = (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3} \quad (3)$$

Mặt khác (2) $\Leftrightarrow y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$.
Để PT này có nghiệm đối với y thì ta phải có:

$$\Delta = (x-4)^2 - 4(x^2-3x+4) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có: $x^4 + y^2 \leq \frac{256}{81} + \frac{49}{9} = \frac{697}{81} < \frac{698}{81} \Rightarrow$ *không thoả (1)*

Vậy: HPT đã cho vô nghiệm.

Bài 63. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} |xy-4| = 8-y^2 \\ xy = 2+x^2 \end{cases}$

- *Nếu* $xy \geq 4$ *thì HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} xy-4 = 8-y^2 & (1) \\ xy = 2+x^2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0,\ x^2 \geq 2$ *và* $y = \frac{2+x^2}{x}$

Thay vào (1) ta được: $2+x^2-4 = 8-\left(\frac{2+x^2}{x}\right)^2 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ *Hệ có nghiệm (x; y) là:* $\left(\sqrt{2};\sqrt{8}\right), \left(-\sqrt{2};-\sqrt{8}\right)$

- *Nếu* $xy < 4$ *thì* $x^2 < 2$.

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-xy = 8-y^2 \\ xy = 2+x^2 \end{cases} \Rightarrow 4-2-x^2 = 8-\left(\frac{2+x^2}{x}\right)^2 \Leftrightarrow 2(2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$ *(loại)*

Kết luận: Nghiệm (x; y) của hệ: $\left(\sqrt{2};\sqrt{8}\right), \left(-\sqrt{2};-\sqrt{8}\right)$

Bài 64. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x\sqrt{x} - \sqrt{x} = y\sqrt{y} + 8\sqrt{y} & (1) \\ x - y = 5 & (2) \end{cases}$

- *Điều kiện* $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. *(1)* $\Leftrightarrow \sqrt{x}(x-1) = \sqrt{y}(y+8) \Leftrightarrow x(x-1)^2 = y(y+8)^2 \qquad (3)$

Thay (2) vào (3) ta được: $3y^2 + 8y - 80 = 0 \Leftrightarrow y = 4\ (x = 9)$ *(vì y > 0)*

Nghiệm: $(9;4)$.

Bài 65. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 8\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

- *Điều kiện:* $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}\right) = 6\left(4\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) & (1) \\ x - 3y = 6 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $3\left(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}\right) = (x-3y)\left(4\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + 4\sqrt{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3\sqrt{y}$.

Nghiệm: $(9;1)$.

Bài 66. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$

- *Điều kiện:* $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 2\sqrt{xy} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$

Nghiệm: $(1;1)$.

Bài 67. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2y^2}=16-2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2y^2}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2y^2}=x+y \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y$

Nghiệm: $(4;4)$.

Bài 68. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 & (1) \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)-(2)$ *ta được:* $x+y=8$

Nghiệm: $(4;4)$.

Bài 69. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 & (1) \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4 & (2) \end{cases}$

• *(2)* $\Leftrightarrow x^2+y^2+2\sqrt{(x^2+1).(y^2+1)}=14 \Leftrightarrow xy+2\sqrt{(xy)^2+xy+4}=11$ *(3)*

Đặt xy = p. $(3) \Leftrightarrow 2\sqrt{p^2+p+4}=11-p \Leftrightarrow \begin{cases} p \le 11 \\ 3p^2+26p-105=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=3 \\ p=\dfrac{-35}{3} \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2=3xy+3$ • $p=xy=-\dfrac{35}{3}$ *(loại)* • $p=xy=3 \Rightarrow x+y=\pm 2\sqrt{3}$

1/ Với $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=y=\sqrt{3}$ *2/ Với* $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=y=-\sqrt{3}$

Vậy hệ có hai nghiệm là: $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$

Bài 70. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y}=3-2x-y & (1) \\ \sqrt[3]{x+6}+\sqrt{1-y}=4 & (2) \end{cases}$

• *Đặt* $t=\sqrt{2x+y}, (t \ge 0)$. *(1)* $\Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 2x+y=1$.

Thay vào (2) ta được: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{2x}=4$ *(4). Đặt* $\begin{cases} u=\sqrt[3]{x+6} \\ v=\sqrt{2x} \end{cases} (v \ge 0)$.

Khi đó: $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ 2u^3-v^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$.

Nghiệm: $(2;-3)$.

Bài 71. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 6\dfrac{x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y & (1) \\ 2\sqrt{3x+\sqrt{3x-y}}=6x+3y-4 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện* $y \ne 0$. *Đặt* $t=\dfrac{\sqrt{3x-y}}{y}$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2.\dfrac{3x-y}{y^2}-\dfrac{\sqrt{3x-y}}{y}-3=0 \Leftrightarrow 2t^2-t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-y}=-y \\ \sqrt{3x-y}=\dfrac{3}{2}y \end{array}\right.$

+ *Với* $\sqrt{3x-y}=-y \Rightarrow y\le 0$. *Thay vào (2) ta được:* $\begin{cases}3x-y=y^2\\ -2y=6x+3y-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=4\end{cases}$

+ *Với* $\sqrt{3x-y}=\dfrac{3}{2}y \Rightarrow y\ge 0$. *Thay vào (2) ta được:* $\begin{cases}3x-y=\dfrac{9}{4}y^2\\ \sqrt{2}\sqrt{6x+3y}=6x+3y-4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow x=y=\frac{8}{9}$$

Nghiệm: $(4;4),\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9}\right)$.

Bài 72. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}8x^2+18y^2+36xy-5(2x+3y)\sqrt{6xy}=0 & (1)\\ 2x^2+3y^2=30 & (2)\end{cases}$

• *Điều kiện:* $xy\ge 0$. *Dễ thấy* $x\ne 0, y\ne 0$. *(1)* $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{2x+3y}{\sqrt{6xy}}\right)^2-5\dfrac{2x+3y}{\sqrt{6xy}}+2=0$ *(3)*

Đặt $t=\dfrac{2x+3y}{\sqrt{6xy}}$. *(3)* $\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

+ *Với* $t=2 \Rightarrow \dfrac{2x+3y}{\sqrt{6xy}}=2 \Rightarrow 2x=3y$. *Thay vào (2) ta được:* $x=3 \Rightarrow y=2$.

+ *Với* $t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2x+3y}{\sqrt{6xy}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ *vô nghiệm*

Nghiệm: $(3;2)$.

Bài 73. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^3-6x^2y+9xy^2-4y^3=0 & (1)\\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2 & (2)\end{cases}$

• *Ta có:* *(1)* $\Leftrightarrow (x-y)^2(x-4y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=4y\end{array}\right.$

+ *Với x = y:* *(2)* $\Rightarrow x=y=2$

+ *Với x = 4y:* *(2)* $\Rightarrow x=32-8\sqrt{15};\ y=8-2\sqrt{15}$

Bài 74. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2 & (1)\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y & (2)\end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 0\end{cases}$. *Ta có: (1)* $\Leftrightarrow (x+y)(y+1)=x^2-y^2 \Leftrightarrow (x+y)(2y-x+1)=0$

$$\Leftrightarrow 2y-x+1=0$$

Thay vào (2) ta được: $(y+1)\sqrt{2y}=2y+2 \Leftrightarrow y=2$ *(vì* $y\ge 0$*)* $\Rightarrow x=5$.

Nghiệm: $(2;5)$.

Bài 75. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x-2y-\sqrt{xy}=0 & (1)\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 & (2)\end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge \dfrac{1}{4}\end{cases}$. *(1)* $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow x=4y$.

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{4y-1}=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2$.

Nghiệm: $\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases}$. *Nghiệm:* $\left(2;\frac{1}{2}\right),\left(10;\frac{5}{2}\right)$.

Bài 76. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $x+y>0$.

(1) $\Leftrightarrow (x+y)^2-1-2xy\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$

(vì $x+y>0$ *nên* $x^2+y^2+x+y>0$*)*

Thay $x=1-y$ *vào (2) ta được:* $1=x^2-(1-x) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (y=0) \\ x=-2 & (y=3) \end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (1; 0), (–2; 3).

Bài 77. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{3}\left(x-y\right)=2\sqrt{xy} & (1) \\ 2x-y^2=8 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện :* $x.y\geq 0\,;x\geq y$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow\ 3(x-y)^2=4xy \Leftrightarrow (3x-y)(x-3y)=0 \Leftrightarrow x=3y$ *hay* $x=\frac{y}{3}$

• *Với* $x=3y$, *thế vào (2) ta được :* $y^2-6y+8=0 \Leftrightarrow y=2\,;y=4$

$\Rightarrow$ *Hệ có nghiệm* $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases};\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$

• *Với* $x=\frac{y}{3}$, *thế vào (2) ta được :* $3y^2-2y+24=0$ *Vô nghiệm.*

Kết luận: hệ phương trình có 2 nghiệm là: $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases};\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$

Bài 78. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện* $x\geq 1,\ y\geq 0 \Rightarrow x+y>0$.

(1) $\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1)=0 \Leftrightarrow x=2y+1$ *(3)*

Thay (3) vào (2) ta được: $(2y+1)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2(2y+1)-2y$

$\Leftrightarrow (y+1)\left(\sqrt{2y}-2\right)=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=5$

Nghiệm: $(5;2)$.

Bài 79. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 & (1) \\ \sqrt{x+y}-\sqrt[3]{3x+y+3}=2x-1 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $x+y>0$.

Từ (1) $\Leftrightarrow (x+y)^2 - 16 - 2xy\left(1 - \frac{4}{x+y}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+y-4)\left[x^2+y^2+4(x+y)\right] = 0$

$\Leftrightarrow x+y-4=0 \Leftrightarrow x+y=4$

Thay vào (2) ta được: $\sqrt[3]{2x+7} = 3-2x \Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(y = \frac{7}{2}\right)$

Nghiệm: $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Bài 80. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x+y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$ (B - 2002)

• *Điều kiện:* $\begin{cases} x-y \ge 0 \\ x+y \ge 0 \end{cases}$ (3). *(1)* $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y}\left(1-\sqrt[6]{x-y}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y+1 \end{array}\right.$.

Thay vào (2) ta được: $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(1;1), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 81. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy+x+y = x^2-2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x-2y & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $x \ge 1, y \ge 0$. *(1)* $\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0 \Leftrightarrow x-2y-1=0 \Leftrightarrow x=2y+1$.

Thay vào (2) ta được: $(y+1)(\sqrt{2y}-2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2y}-2=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=5$.

Nghiệm: $(5;2)$.

Bài 82. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2y}{x}} = 3 \\ x-y+xy=3 \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} = 5 \\ x-y+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(2x-y) = 0 \\ x-y+xy=3 \end{cases}$

Nghiệm: $(2;1), (-1;-2), \left(-3; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Bài 83. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{2}(x-y) = \sqrt{xy} & (1) \\ x^2-y^2=3 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $x \ge y$. *Khi đó (1)* $\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ y=2x \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(2;1)$.

Bài 84. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} & (1) \\ \sqrt{y-1} - \sqrt{4-x} + 8 - x^2 = 0 & (2) \end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3y+2} = \sqrt{x+2} + 3\sqrt{y} \Leftrightarrow 4(x+3y+2) = x+2+9y+6\sqrt{y(x+2)}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x+2$. *Thay vào (2) ta được:*

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}-3-x\right)=0$

$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=5$.

Ta cần chứng minh PT: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}=x+3$ *(*) vô nghiệm trên đoạn* $[-1;4]$.

Thật vậy: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}\le\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}\le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}\le\dfrac{3}{2}$

Mà: $x+3\ge 2$ *nên (*) vô nghiệm.*

Kết luận: Nghiệm $(3;5)$.

Bài 85. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1 & (1)\\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{35}{12}=0 & (2)\end{cases}$

• *Chú ý:* $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)=1,\ (\sqrt{y^2+1}+y)(\sqrt{y^2+1}-y)=1$

Từ (1) $\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+1}+x=\sqrt{y^2+1}-y & (3)\\ \sqrt{x^2+1}-x=\sqrt{y^2+1}+y & (4)\end{cases}$. *Lấy* $(3)-(4)$ *ta được:* $x=-y$.

Nghiệm: $\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3}\right),\left(\dfrac{5}{4};-\dfrac{5}{4}\right)$.

Bài 86. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}=6 & (1)\\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}=6 & (2)\end{cases}$

• *Lấy* $(1)-(2)$ *ta được:* $\sqrt{7+x}-\sqrt{7-y}+\sqrt{11-y}-\sqrt{11-x}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-y}{\sqrt{7+x}+\sqrt{7+y}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{11-x}+\sqrt{11-y}}=0 \Leftrightarrow x-y=0$

Nghiệm: $(2;2)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2}\\ \sqrt{y}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2}\end{cases}$. *Nghiệm:* $(0;0),(2;2)$. *b)* $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{7-y}=4\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{7-x}=4\end{cases}$. *Nghiệm:* $(3;3)$.

Bài 87. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+3}\right)x=y-3 & (1)\\ \sqrt{x^2+y}+\sqrt{x}=x+3 & (2)\end{cases}$

• *Để ý rằng:* $\left(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+3}\right)=y-3$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+3}-x\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+3}=x$

Kết hợp với (2) ta được: $\sqrt{x}+\sqrt{x^2+3}=3 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=8$

Nghiệm: $(1;8)$.

Bài 88. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=3 & (1)\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=x+1 & (2)\end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$. *Ta có: (1)* $\Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ *(nhân lượng liên hợp).*

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{x+3}=x+1 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Nghiệm: $(1;1)$.

Bài 89. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=1 & (1) \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=1 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$.

Ta có (1) $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=1 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2y \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x+y}=2y+1 \Rightarrow y^2=x-\frac{1}{4}$ *(3)*

(2) $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=1 \\ \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=2y^2 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=2y^2+1 \Rightarrow 4x^2=4y^4+1$ *(4)*

Từ (3), (4) $\Rightarrow x=\frac{5}{8} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Nghiệm: $\left(\frac{5}{8};\pm\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4 \end{cases}$. *Nghiệm:*

b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \\ \sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}=4 \end{cases}$. *Nghiệm:*

Bài 90. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{1+\frac{1}{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}} & (1) \\ \sqrt{xy}+\sqrt{y+1}+\sqrt{1-x}=1 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ -1\le y\ne 0 \end{cases}$. *Ta có (1)* $\Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{y+1}=\sqrt{x}$.

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(0;-1),(1;0)$.

Bài 91. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185 & (1) \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65 & (2) \end{cases}$

• *Lấy* $(1)+(2)$ *ta được:* $2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=250 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=5 \Leftrightarrow x^2+y^2=25$

Khi đó: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$

Nghiệm: $(4;3),(-4;-3),(3;4),(-3;-4)$.

Bài 92. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$

• *ĐK:* $x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\ne 0$. *Dễ thấy nếu* $(x;y)$ *là nghiệm của hệ thì* $x>0, y>0$.

Do đó: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (1) \\ 1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2) \end{cases}$

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta được: $\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{3x}-\dfrac{8}{7y} \Leftrightarrow 21xy=(x+y)(7y-3x)$

$\Leftrightarrow (y-6x)(7y+4x)=0 \Leftrightarrow y=6x$ *(vì* $x>0, y>0$*).*

Nghiệm: $\left(\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21};\dfrac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$.

Bài 93. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2 \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}} \\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}} & (1) \\ \dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{3}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}} & (2) \end{cases}$

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta được: $\dfrac{12}{3x+y}=\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow (3x-2y)^2=5y^2$.

Nghiệm:

Bài 94. Giải hệ phương trình sau:

•

Vấn đề 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

Biến đổi các phương trình của hệ để có thể đặt ẩn phụ, rồi chuyển về hệ cơ bản.

Thông thường đưa về dạng: $\begin{cases} f(u,v)=0 \\ g(u,v)=0 \end{cases}$

Bài 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-2)^2+(y-3)^2=4 \\ (x^2-2+4)(y-3+3)+x^2-2-20=0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x^2-2 \\ v=y-3 \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=4 \\ uv+4(u+v)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases} \vee \begin{cases} u=0 \\ v=2 \end{cases}$.

Nghiệm: $(2;3),(-2;3),(\sqrt{2};5),(-\sqrt{2};5)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+5x+y=9 \\ 3x^3+x^2y+2xy+6x^2=18 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+3x+y=9 \\ (x^2+2x)(3x+y)=18 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x^2+2x \\ v=3x+y \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=9 \\ uv=18 \end{cases}$

Nghiệm: $(1;3),(-3;15),(-1-\sqrt{7};6+3\sqrt{7}),(-1+\sqrt{7};6-3\sqrt{7})$.

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-3x+4y=1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y=3 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+y^2+4y=1 \\ 3(x^2-3x)-2(y^2+4y)=3 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x^2-3x \\ v=y^2+4y \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ 3u-2v=3 \end{cases}$.

Nghiệm: $\left(\frac{3\pm\sqrt{13}}{2};0\right),\left(\frac{3\pm\sqrt{13}}{2};-4\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \frac{1}{x^2+2x}+\frac{1}{y^2+2y}=\frac{2}{3} \end{cases}$.

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=4 \\ \frac{1}{(x+1)^2-1}+\frac{1}{(y+1)^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+1 \\ v=y+1 \end{cases}$ $(u\neq\pm1, v\neq\pm1)$.

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} uv=4 \\ \frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{v^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=4 \\ 3(u^2+v^2-2)=2(u^2v^2-u^2-v^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=4 \\ u^2+v^2=8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v=2 \\ u=v=-2 \end{array}\right.$. *Nghiệm:* $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-4 \\ xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-4 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=-4 \\ uv=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2 \\ v=-2 \end{cases}$

Nghiệm: $(-1;-1)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y(x^2+1)=2x(y^2+1) \\ (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=24 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x}=2\dfrac{y^2+1}{y} \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2\left(y+\dfrac{1}{y}\right) \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=28 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u=2v \\ u^2+v^2=28 \end{cases}$

Nghiệm:

Bài 7. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{2}{3} \\ (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=6 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}=\dfrac{2}{3} \\ x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=6 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{2}{3} \\ u+v=6 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=3$

Nghiệm:

Bài 8. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=9 \\ (x^3+y^3)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=27 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=9 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^3+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^3=27 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{y} \\ v=y+\dfrac{1}{x} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=9 \\ u^3+v^3=27 \end{cases}$.

Nghiệm:

Bài 9. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3y(1+y)+x^2y^2(2+y)+xy^3-30=0 \\ x^2y+x(1+y+y^2)+y-11=0 \end{cases}$

• *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)^2+x^2y^2(x+y)=30 \\ xy(x+y)+xy+x+y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy)=30 \\ xy(x+y)+xy+x+y=11 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v)=30 \\ uv+u+v=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(11-uv)=30 & (1) \\ uv+u+v=11 & (2) \end{cases}$. *Từ (1)* $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} uv=5 \\ uv=6 \end{array}\right.$

• *Với uv = 5* $\Rightarrow u+v=6$. *Nghiệm (x; y) là:* $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$ *và* $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$

• *Với uv = 6* $\Rightarrow u+v=5$. *Nghiệm (x; y) là:* $(1;2)$ *và* $(2;1)$

Kết luận: Hệ PT có 4 nghiệm: $(1;2)$, $(2;1)$, $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$

Bài 10. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy-3x-2y=16 \\ x^2+y^2-2x-4y=33 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-2)-(x-1)-(y-2)=21 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=38 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-2 \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} uv-(u+v)=21 \\ u^2+v^2=38 \end{cases}$

Nghiệm: $\left(-3+\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\right)$, $\left(-3-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4xy+1}{x+2y}=-5 \\ \dfrac{x}{x+2y}=-3 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\dfrac{1}{x+2y}=-5 \\ 2x\dfrac{1}{x+2y}=-6 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=2x \\ v=\dfrac{1}{x+2y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=-5 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-2, v=-3 \\ u=-3, v=-2 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $\left(-1;\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y(x+1)\left(x+1+\dfrac{1}{y}\right)=2 \\ 2(x+1)=y\left(x+1+\dfrac{1}{y}\right) \end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases} u=x+1 \\ v=y\left(x+1+\dfrac{1}{y}\right) \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} uv=2 \\ 2u=v \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1, v=2 \\ u=-1, v=-2 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(0;1),(-2;3)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4(x^2+y^2+xy)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)^2+(x-y)^2=13 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+x-y=3 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+y+\dfrac{1}{x+y} \\ v=x-y \end{cases}$ *(với* $|u|\ge 2$*)*

$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ (vì $|u| \ge 2$) $\Rightarrow \begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Bài 14. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3(x^2 + y^2) + \dfrac{1}{(x-y)^2} = 2(10 - xy) \\ 2x + \dfrac{1}{x-y} = 5 \end{cases}$

• $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{1}{(x-y)^2} = 20 \\ x + y + x - y + \dfrac{1}{x-y} = 5 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y + \dfrac{1}{x-y} \end{cases}$ *(với* $|v| \ge 2$*)*

$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 + v^2 - 2 = 20 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = \dfrac{14}{3} \end{cases}$.

Nghiệm: $(2;1), \left(\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}; \dfrac{-3-\sqrt{10}}{3}\right), \left(\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}; \dfrac{-3+\sqrt{10}}{3}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2y + xy^2 = 15 \\ 8x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

• *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy(2x + y) = 30 \\ (2x)^3 + y^3 = 35 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u = 2x \\ v = y \end{cases}$. *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2;\ v = 3 \\ u = 3;\ v = 2 \end{array}\right.$

Nghiệm (x; y): $(1;3), \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 \\ x^2 + 4x + y = 6 \end{cases}$

• *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2x)(2x + y) = 9 \\ (x^2 + 2x) + (2x + y) = 6 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u = x^2 + 2x \\ v = 2x + y \end{cases}$. $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 9 \\ u + v = 6 \end{cases}$

Nghiệm: $(1;1), (-3;9)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \end{cases}$

• *Chú ý:* $x^2 - xy + y^2 = \dfrac{1}{4}\left[3(x-y)^2 + (x+y)^2\right]$. *Đặt* $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$*, ta được:* $\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 4v \\ uv = 3 \end{cases}$

Nghiệm: $(2;1)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} |x + y| + |x - y| + |x^2 - y^2| = 5 \\ 2(x^2 + y^2) = 5 \end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases} u = |x + y| \\ v = |x - y| \end{cases}$ $(u, v \ge 0)$. $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + uv = 5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1, v = 2 \\ u = 2, v = 1 \end{array}\right.$

Nghiệm: $\left(-\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{3}{2}\right), \left(-\dfrac{3}{2}; \pm\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{3}{2}; \pm\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{y}{x}=1 \\ x^2+y^2+4\dfrac{x}{y}=22 \end{cases}$

- *Điều kiện:* $x \neq 0, y \neq 0, x^2+y^2-1 \neq 0$

Đặt $u = x^2+y^2-1; v=\dfrac{x}{y}$. *Hệ PT trở thành:* $\begin{cases} \dfrac{3}{u}+\dfrac{2}{v}=1 \\ u+1+4v=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{u}+\dfrac{2}{v}=1 & (1) \\ u=21-4v & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $\dfrac{3}{21-4v}+\dfrac{2}{v}=1 \Leftrightarrow 2v^2-13v+21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=3 \\ v=\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$

- *Nếu v = 3 thì u = 9, ta có Hệ PT:*

$\begin{cases} x^2+y^2-1=9 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

- *Nếu* $v=\dfrac{7}{2}$ *thì u = 7, ta có Hệ PT:*

$\begin{cases} x^2+y^2-1=7 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x=\dfrac{7}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ x=14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \end{cases} \vee \begin{cases} y=-4\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ x=-14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \end{cases}$

So sánh điều kiện ta được 4 nghiệm của Hệ PT.

Bài 20. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(1+x)+\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{y}+1\right)=4 & (1) \\ x^3y^3+x^2y^2+xy+1=4y^3 & (2) \end{cases}$

- *Dễ thấy* $y \neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)=4 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)=4 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{y} \\ v=x^2+\dfrac{1}{y^2} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=2$.

Nghiệm: $(1;1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$ (B - 2009)

- *Dễ thấy y ≠ 0. HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{x}{y}=7 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}=13 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{y} \\ v=\dfrac{x}{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=7 \\ u^2-v=13 \end{cases}$

Nghiệm $\left(1;\frac{1}{3}\right)$, $(3;1)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y+6x=y^2 \end{cases}$

• *Dễ thấy* $y\neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3+\left(\frac{3}{y}\right)^3=18 \\ 2x.\frac{3}{y}\left(2x+\frac{3}{y}\right)=3 \end{cases}$. *Đặt* $a=2x;\ b=\frac{3}{y}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=1 \end{cases}$

Nghiệm: $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4};\frac{6}{3+\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4};\frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$

Cách 2: *Dễ thấy* $y\neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y^2+6xy=y^3 \end{cases} \Rightarrow 8x^3y^3+27=18(4x^2y^2+6xy)$ *(*)*

Đặt $t=xy$. *(*)* $\Leftrightarrow (2t+3)(4t^2-42t+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{3}{2} \\ t=\frac{21\pm 9\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} 27x^3y^3+125=9y^3 \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}$. *Nghiệm* $\left(\frac{2}{3};5\right),\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3y^3+1=2y^3 \\ \frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^2}=2 \end{cases}$

• *Dễ thấy* $y\neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+\frac{1}{y^3}=2 \\ \frac{x}{y}\left(x+\frac{1}{y}\right)=2 \end{cases}$.

Đặt $t=\frac{1}{y}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+t^3=2 \\ xt(x+t)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+t=2 \\ xt=1 \end{cases}$

Nghiệm: $(1;1)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$

• *Dễ thấy* $y\neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=6\left(\frac{x}{y}\right)^2 \\ \left(x+\frac{1}{y}\right)^2=5\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y} \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+\frac{1}{y} \\ v=\frac{x}{y} \end{cases}$.

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} u=6v^2 \\ u^2=5v^2+2v \end{cases}$

Nghiệm:

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$. *Nghiệm* $\left(\frac{1}{3};-2\right), \left(-\frac{1}{2};3\right)$.

Bài 25. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$

• *Dễ thấy* $y \neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(y+x-2) = 1 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u = \dfrac{x^2+1}{y} \\ v = y + x - 2 \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases}$

Nghiệm: $(1;2), (-2;5)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2y^2 + 2y^2 + 4 = 7xy \\ x^2 + 2y^2 + 6y = 3xy^2 \end{cases}$

• *Dễ thấy* $y \neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 + \dfrac{4}{y^2} = 7\dfrac{x}{y} \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2 + \dfrac{6}{y} = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{2}{y}\right)^2 - 3\dfrac{x}{y} = -2 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 3\left(x - \dfrac{2}{y}\right) = -2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x - \dfrac{2}{y} \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 3v = -2 \\ v^2 - 3u = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v = 1 \\ u = v = 2 \end{array}\right.$

+ *Với* $u = v = 1$ *thì* $\begin{cases} x - \dfrac{2}{y} = 1 \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -1 \\ x = y = 2 \end{array}\right.$

+ *Với* $u = v = 2$ *thì* $\begin{cases} x - \dfrac{2}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{5};\ y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = 1 + \sqrt{5};\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Nghiệm: $(-1;-1), (2;2), \left(1-\sqrt{5}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(1+\sqrt{5}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2(y+1) = 6y - 2 \\ x^4y^2 + 2x^2y^2 + y(x^2+1) = 12y^2 - 1 \end{cases}$

• *Dễ thấy* $y \neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = 6 - \dfrac{2}{y} \\ x^4 + 2x^2 + \dfrac{x^2+1}{y} = 12 - \dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x^2+1}{y} = 7 \\ \left(x^2 + 1 + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x^2+1}{y} = 13 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + 1 + \dfrac{1}{y} \\ v = \dfrac{x^2+1}{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 - v = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -5, v = 12 \\ u = 4, v = 3 \end{array}\right.$

+ *Với* $\begin{cases} u=-5 \\ v=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+1+\dfrac{1}{y}=-5 \\ \dfrac{x^2+1}{y}=12 \end{cases}$ *(vô nghiệm)*

+ *Với* $\begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+1+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ y=\dfrac{1}{3} \\ x=\pm\sqrt{2},\ y=1 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right),\left(\pm\sqrt{2};1\right)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2y+y+xy^2+x=18xy \\ x^4y^2+y^2+x^2y^4+x^2=208x^2y^2 \end{cases}$

• *Với* $x=0 \Rightarrow y=0$.

+ *Với* $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$ *ta có: HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=18 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=208 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=18 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=212 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases}$. *Ta được HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=18 \\ u^2+v^2=212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=14 \end{cases} \vee \begin{cases} u=14 \\ v=4 \end{cases}$

Nghiệm: $(0;0),(2+\sqrt{3};7\pm4\sqrt{3}),(2-\sqrt{3};7\pm4\sqrt{3}),(7+4\sqrt{3};2\pm\sqrt{3}),(7-4\sqrt{3};2\pm\sqrt{3})$.

Bài 29. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \end{cases}$

• *Với* $x=0 \Rightarrow y=0$.

+ *Với* $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$ *ta có: HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1+\dfrac{y}{x}=0 \\ x^2-4y+3+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=x+\dfrac{y}{x}+1 & (1) \\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{y}{x}\right)=0 & (2) \end{cases}$

Đặt $t=x+\dfrac{y}{x}$. *(2)* $\Leftrightarrow t^2-3t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow x+\dfrac{y}{x}=0 \vee x+\dfrac{y}{x}=3$

Nghiệm: $(0;0),(1;2),(2;2)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2 \\ y-y^2x-2y^2=-2 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{1}{y}-x-2=-\dfrac{2}{y^2} \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x \\ v=\dfrac{1}{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2+u-v=2 & (1) \\ 2v^2-u+v=2 & (2) \end{cases}$

Lấy $(1)-(2)$ *ta được:* $2(u^2-v^2)+2(u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=0 \\ u+v+1=0 \end{array}\right.$

Nghiệm: $(1;1),(-1;-1),\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2};\sqrt{3}+1\right),\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};1-\sqrt{3}\right)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2y^2-x^2=1 \\ 2x^3-y^3=2y-x \end{cases}$

- $HPT \Rightarrow 2x^3-y^3=(2y^2-x^2)(2y-x) \Leftrightarrow x^3+2x^2y+2xy^2-5y^3=0$

Khi $y=0$ *thì hệ VN.*

Khi $y \neq 0$, *chia 2 vế cho* $y^3 \neq 0$ *ta được:* $\left(\frac{x}{y}\right)^3+2\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)-5=0$

Đặt $t=\frac{x}{y}$, *ta có :* $t^3+2t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$

Nghiệm: $(1;1),(-1;-1)$.

Bài 32. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

- *Từ hệ PT* $\Rightarrow y \neq 0$. *Khi đó ta có:* $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ (x+y)^2-2\frac{x^2+1}{y}=7 \end{cases}$.

Đặt $u=\frac{x^2+1}{y}, v=x+y$ *ta có hệ:* $\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{array}\right.$

- *Với* $v=3, u=1$ *ta có hệ:* $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{array}\right.$.
- *Với* $v=-5, u=9$ *ta có hệ:* $\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases}$, *hệ VN*

Nghiệm: $(1;2),(-2;5)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x+y)=0 & (1) \\ 2x+y+\frac{1}{2x-y}=0 & (2) \end{cases}$

- *Dễ thấy* $2x+y \neq 0$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)-5(2x-y)+6=0 \\ 2x+y+\frac{1}{2x-y}=0 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=2x+y \\ v=2x-y \end{cases}$ $(u.v \neq 0)$.

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} u-5v=-6 \\ u+\frac{1}{v}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1, v=1 \\ u=-5, v=\frac{1}{5} \end{array}\right.$.

Nghiệm:

Bài 34. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 & (1) \\ x^2+xy+y^2=7 & (2) \end{cases}$

- *Điều kiện:* $y \geq -1$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+2)=-5 \\ 3(x+y)^2+(x-y)^2=28 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$, *ta được:* $\begin{cases} v(u+2) = -5 \\ 3u^2 + v^2 = 28 \end{cases}$.

Nghiệm: $(-3;2),(1;2)$.

Bài 35. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y = 4 \end{cases}$

• *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ (2x+y+1)+(x+y) = 5 \end{cases}$. *Đặt* $u = \sqrt{2x+y+1} \geq 0,\ v = \sqrt{x+y} \geq 0$.

Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2,\ v = 1 \\ u = -1,\ v = -2\ (loại) \end{array}\right.$

Nghiệm: $(2;-1)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 20 \\ 3x+2y = 4 \end{cases}$

Bài 36. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x^2+6y} = y+3 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$

• *Điều kiện* $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x \geq y \geq -3 \end{cases}$. *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6y = y^2+6y+9 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y) = 9 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+y} \\ v = \sqrt{x-y} \end{cases}$ $(u, v \geq 0)$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2v^2 = 9 \\ u+v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1, v = 3 \\ u = 3, v = 1 \end{array}\right.$

Nghiệm: $(5;4)$.

Bài 37. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$

• *Điều kiện:* $x+y > 0,\ x-y \geq 0$.

Đặt: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ *ta có hệ:* $\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2\ (u > v) \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 & (2) \end{cases}.$$

Thế (1) vào (2) ta có: $\sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3 \Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0$.

Kết hợp (1) ta có: $\begin{cases} uv = 0 \\ u+v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4, v = 0$ *(với* $u > v$*).*

Nghiệm: $(2;\ 2)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4 \end{cases}$

Bài 38. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 9 - |x+2y| \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y} + |x+2y| = 9 \\ (x+2y)^2 - 2(x-y) = 41 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u = \sqrt{x-y} \\ v = |x+2y| \end{cases} (u, v \geq 0)$.

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=9 \\ v^2 - 2u^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y} = 2 \\ x+2y=7 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x-y} = 2 \\ x+2y=-7 \end{cases}$

Nghiệm: $(5;1), \left(\frac{1}{3}; -\frac{11}{3}\right)$.

Bài 39. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3x+3y} & (1) \\ 12x(2x^2+3y+7xy) = -1 - 12y^2(3+5x) & (2) \end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} = u \geq 0 \\ \sqrt{3x+3y} = v \geq 0 \end{cases}$. *(1)* $\Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - v^2 = 3 \\ 9u + 9 = 4v^4 + 9v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - v^2 = 3 \\ 9u + (3u^2 - v^2)^2 = 4v^4 + 9v \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - v^2 = 3 \\ (u-v)(9u^3 + 9u^2v + 3uv^2 + 3v^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow 2x + 2y = 1$.

Nghiệm: $\left(-\frac{5}{6}; \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{10}; -\frac{1}{6}\right)$.

Bài 40. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 & (1) \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 & (2) \end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases} u = \sqrt{7x+y} \\ v = \sqrt{2x+y} \end{cases} (u, v \geq 0)$. *(1)* $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 5x \\ u + v = 5 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{5-x}{2}$.

Thay vào (2) ta được: $x = 2y - 1$.

Nghiệm: $\left(10 - \sqrt{77}; \frac{11 - \sqrt{77}}{2}\right)$.

Bài 41. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 & (1) \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 & (2) \end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - y^2} \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{u^2}{v} \\ x + y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u^2 + v^2}{2v} \\ y = \frac{v^2 - u^2}{2v} = \frac{6(v-u)}{v} \end{cases}$

HPT $\Rightarrow \begin{cases} \frac{6(v-u)}{v}.u = 12 \\ u + v = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3, v = 9 \\ u = 4, v = 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, y = 4 \\ x = 5, y = 3 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(5;4), (5;3)$.

Bài 42. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2(x+y) = 3\left(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x} \\ v = \sqrt[3]{y} \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u^3 + v^3) = 3(u^2v + uv^2) \\ u + v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ uv = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2, v = 4 \\ u = 4, v = 2 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(8;64), (64;8)$.

Bài 43. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[5]{y^3}=35\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{y}=5\end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases}u=\sqrt[4]{x}\\ v=\sqrt[5]{y}\end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}u^3+v^3=35\\ u+v=5\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=2,v=3\\ u=3,v=2\end{array}\right.$.

Nghiệm: $(16;243),(81;32)$.

Bài 44. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y-1}=3\\ x+y=11\end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases}u=\sqrt[3]{x-1}\\ v=\sqrt[3]{y-1}\end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=3\\ u^3+v^3=9\end{cases}$

Nghiệm: $(2;9),(9;2)$.

Bài 45. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7\\ 3x+2y=23\end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases}u=\sqrt{x+y}\\ v=\sqrt{2x+y+2}\end{cases}$ $(u,v\geq 0)$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=7\\ u^2+v^2=25\end{cases}$

Nghiệm: $(5;4),(-9;25)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3\\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8\end{cases}$. *Nghiệm* $(3;1),(5;-1),(4+\sqrt{10};3-\sqrt{10}),(4-\sqrt{10};3+\sqrt{10})$

Bài 46. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x+\sqrt{y-1}=6\\ \sqrt{x^2+2x+y+2x\sqrt{y-1}+2\sqrt{y-1}}=29\end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}x+1+\sqrt{y-1}=7\\ \sqrt{x(+1)^2+y-1+2\sqrt{y-1}(x+1)}=29\end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases}u=x+1\\ v=\sqrt{y-1}\end{cases}$ $(v\geq 0)$

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=7\\ \sqrt{u^2+v^2+2uv}=29\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=3,v=4\\ u=4,v=3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,y=17\\ x=3,y=10\end{array}\right.$

Nghiệm: $(2;17),(3;10)$.

Bài 47. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 & (1)\\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1 & (2)\end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases}u=\sqrt{2-x}\\ v=\sqrt{2y-1}\end{cases}$ $(u,v\geq 0)$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}(u^2+1)u-(v^2+1)v=0 & (3)\\ 2u-v^3=1 & (4)\end{cases}$

Ta có (3) $\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+1)=0 \Leftrightarrow u=v$

Thay vào (4) ta được: $u^3-2u+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=1\\ u=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}x=1 & (y=1)\\ x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} & (y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4})\end{array}\right.$

Nghiệm: $(1;1),\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài 48. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+7}=7\end{cases}$

- *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+7}+\sqrt{y}\right)=12\\ \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+7}-\sqrt{y}\right)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+7}+\sqrt{y}\right)=12\\ \dfrac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}+\dfrac{7}{\sqrt{y+7}+\sqrt{y}}=2\end{cases}$

  Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\\ v=\sqrt{y+7}+\sqrt{y}\end{cases}$ $(u,v\geq 0)$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=12\\ \dfrac{5}{u}+\dfrac{7}{v}=2\end{cases}$

  Nghiệm:

  Bài tương tự:

  a) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=4\\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+4}=6\end{cases}$. *Nghiệm* $(3;5)$. *b)* $\begin{cases}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}=4\\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+5}=6\end{cases}$. *Nghiệm* $(2;2)$

  c) $\begin{cases}\sqrt{3x}+\sqrt{3y}=6\\ \sqrt{3x+16}+\sqrt{3y+16}=10\end{cases}$. *Nghiệm* $(3;3)$. *d)* $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ \sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}=8\end{cases}$. *Nghiệm* $(9;9)$

Bài 49. Giải hệ phương trình sau:

-

Vấn đề 3: Phương pháp đánh giá

Từ điều kiện của ẩn, xét trường hợp xảy ra dấu "=" ở bất đẳng thức.

Bài 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 = 9z^2 - 27(z-1) & (a) \\ y^3 = 9x^2 - 27(x-1) & (b) \\ z^3 = 9y^2 - 27(y-1) & (c) \end{cases}$

• *Cộng (a), (b), (c) ta được:* $(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0 \quad (d)$

+ *Nếu x > 3 thì từ (b) suy ra:* $y^3 = 9x(x-3) + 27 > 27 \Rightarrow y > 3$

từ (c) suy ra: $z^3 = 9y(y-3) + 27 > 27 \Rightarrow z > 3 \Rightarrow$ *(d) không thoả mãn*

+ *Tương tự, nếu x < 3 thì từ (a) ⇒ 0 < z < 3 ⇒ 0 < y <3 ⇒ (d) không thoả mãn*

+ *Nếu x = 3 thì từ (b) ⇒ y = 3; thay vào (c) ⇒ z = 3.*

Vậy: $x = y = z = 3$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} x^3 = 12z^2 - 48z + 64 \\ y^3 = 12x^2 - 48x + 64 \\ z^3 = 12y^2 - 48y + 64 \end{cases}$. *Nghiệm:* $x = y = z = 4$.

b) $\begin{cases} x^3 = 6z^2 - 12z + 8 \\ y^3 = 6x^2 - 12x + 8 \\ z^3 = 6y^2 - 12y + 8 \end{cases}$. *Nghiệm:* $x = y = z = 2$.

Bài 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$

• *Dễ thấy x > 0, y > 0, z > 0.*

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \Rightarrow \sqrt{y} + 1 \ge \sqrt{z} + 1 \Rightarrow y \ge z$.

Ta lại có: $z = \sqrt{x} + 1 \ge \sqrt{y} + 1 = x \Rightarrow x \ge y \ge z \ge x \Rightarrow x = y = z$.

$\Rightarrow x - \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$. *Nghiệm* $x = y = z = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$. *Nghiệm* $(0;0), (1;1), \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \dfrac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases}$

• *Nếu x = 0 thì y = 0, z = 0 ⇒ Hệ có nghiệm (x; y; z) = (0; 0; 0)*

• *Nếu x ≠ 0 thì y > 0, z > 0 ⇒ x > 0.*

Ta có: $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1} \le \dfrac{2x^2}{2x} = x$. *Tương tự ta suy ra được:* $y \le x \le z \le y \Rightarrow x = y = z$

$\Rightarrow \dfrac{2x^2}{x^2+1} = x \Rightarrow x = 1$. *Nghiệm* $(0;\ 0;\ 0),\ (1;\ 1;\ 1)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} 36x^2y - 60x^2 + 25y = 0 \\ 36y^2z - 60y^2 + 25z = 0 \\ 36z^2x - 60z^2 + 25x = 0 \end{cases}$. *Nghiệm* $(0;0;0), \left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$

• $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = -(x+1)^2(x-2) & (1) \\ x - 2 = 2(y+1)^2(y-2) & (2) \end{cases}$

Dễ dàng thấy (x; y) = (2; 2) là một nghiệm của hệ.

Nếu x > 2 thì từ (1) ⇒ y < 2. Nhưng từ (2) ⇒ x – 2 và y – 2 cùng dấu ⇒ Mâu thuẫn.

Nếu x < 2 thì cũng suy ra điều mâu thuẫn tương tự.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất x = y = 2.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2 + y^3 - 4x + 3 = 0 \\ x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2 + (y^3+1) = 0 & (1) \\ y^2 = \dfrac{2x}{1+x^2} & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow y^3 + 1 \le 0 \Rightarrow y \le -1$ *(3)*

Từ (2) $\Rightarrow x \ge 0$. *Ta có* $\dfrac{2x}{1+x^2} \le 1 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1$ *(4)*

Từ (3), (4) $\Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1$.

Nghiệm: $(1;-1)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 \end{cases}$

• *Ta có:* $(1) \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow x \ge 0, y^2 \le 1$

$(2) \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+7) + 6(y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ *(vì* $(x-1)^2(2x+7), (y+1)$ *không âm)*

Nghiệm: $(1;-1)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} |xy - 10| = 20 - x^2 & (1) \\ xy = 5 + y^2 & (2) \end{cases}$

• *Từ (2)* $\Rightarrow x = \dfrac{5+y^2}{y} = \dfrac{5}{y} + y$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $|x| = \dfrac{5}{|y|} + |y| \ge 2\sqrt{5} \Rightarrow x^2 \ge 20$. *Mà theo (1) thì* $x^2 \le 20$.

Do đó $x^2 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 2\sqrt{5} & (y = \sqrt{5}) \\ x = -2\sqrt{5} & (y = -\sqrt{5}) \end{array}\right.$

Bài 8. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$

• *Cộng hai phương trình, vế theo vế, ta được:* $\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2$ *(*)*

Ta có: $\sqrt[3]{x^2-2x+9}=\sqrt[3]{(x-1)^2+8}\ge 2$, $\sqrt[3]{y^2-2y+9}=\sqrt[3]{(y-1)^2+8}\ge 2$

$\Rightarrow$ *VT (*)* $\le \dfrac{2xy}{2}+\dfrac{2xy}{2}=2xy\le 2|xy|\le x^2+y^2$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=0 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(0;\ 0), (1;\ 1)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2+3=0 & (1) \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y-24=0 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} 0\le x\le 32 \\ \sqrt{3}\le y\le 4; y\le -\sqrt{3} \end{cases}$.

Lấy $(1)+(2)$ *ta được:* $\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21$ *(*)*

Mà: $+\ y^2-6y+21=(y-3)^2+12\ge 12$

$+\ \sqrt{x}+\sqrt{32-x}\le\sqrt{(1+1)(x+32-x)}=8$; $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le\sqrt{(1+1)(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})}\le 4$

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le 12$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\sqrt{32-x} \\ \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{32-x} \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=3 \end{cases}$.

Nghiệm: $(16;3)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2^x+4^y=32 & (1) \\ xy=8 & (2) \end{cases}$

• *Ta có x, y phải là các số dương. Vì nếu x, y < 0 thì* $2^x+4^y<2<32$.

Khi đó ta có: $2^x+4^y\ge 2\sqrt{2^x.4^y}=2\sqrt{2^{2+2y}}\ge 2\sqrt{2^{2\sqrt{2xy}}}=32$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow$ $x=2y$. *Thay vào (2), ta được:* $x=4,\ y=2$.

Nghiệm: $(4;2)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} y^3+x^2=\sqrt{64-x^2y} & (1) \\ (x^2+2)^3=y+6 & (2) \end{cases}$

• *Từ (2):* $y+6=(x^2+2)^3\ge 8 \Rightarrow y\ge 2 \Rightarrow y^3+x^2\ge 8$

Mặt khác $\sqrt{64-x^2y}\le 8$. *Do đó (1)* $\Leftrightarrow \begin{cases} y^3+x^2=8 \\ \sqrt{64-x^2y}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

Nghiệm: $(0;2)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x+y}=3 & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{(y-4)^2+5}=\sqrt{5} & (2) \end{cases}$

• *Ta có:* $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{(y-4)^2+5} \geq \sqrt{5}$. *Do đó: (2)* $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ *(thoả (1))*

Nghiệm: $(0;4)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3|x|^3+|y|+x^2=4 & (1) \\ \sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+y^2}=1 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x+y^2 \geq 0 \end{cases}$. *Từ đó* $3|x|^3+|y|+x^2 \geq 4$. *Dó đó (1)* $\Leftrightarrow \begin{cases} |x|=1 \\ y=0 \end{cases}$

Nghiệm: $(1;0)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3-(y+1)^2=\sqrt{x-y} & (1) \\ x+8y=\sqrt{x-y-9} & (2) \end{cases}$

• *Ta có: (1)* $\Leftrightarrow \sqrt{x-y}-3=-(y+1)^2 \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x-y} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x-y \leq 9$ *(a)*

Từ (2) ta có điều kiện: $x-y-9 \geq 0 \Rightarrow x-y \geq 9$ *(b)*

Từ (a) và (b) $\Rightarrow x-y=9$

Nghiệm: $(8;-1)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình sau:

•

Vấn đề 4: Phương pháp hàm số

Chọn hàm số thích hợp, rồi sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Cho hàm số y = f(x) đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng (α; β). Khi đó, với mọi a, b ∈ (α; β) ta có: f(a) = f(b) ⇔ a = b.

Chú ý: *Các hệ phương trình hoán vị vòng quanh* $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$, *thường sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh x = y = z.*

– *Xét tính đơn điệu hàm số f(t).*
– *Chứng tỏ x < y, x > y, … không xảy ra.*
– *Từ đó suy ra x = y = z. Thế vào hệ đã cho để giải tìm x, y, z.*

Bài 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y & (1) \\ x^8 + y^4 = 1 & (2) \end{cases}$

• *Từ (2)* $\Rightarrow x^8 \le 1, y^4 \le 1 \Rightarrow |x| \le 1, |y| \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 5t,\ t \in [-1;1] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 5 < 0,\ \forall t \in [-1;1]$ $\Rightarrow$ *f(t) nghịch biến trên [–1; 1].*

Do đó: Từ (1) ⇒ f(x) = f(y) ⇔ x = y.

Thay vào (2) ta được: $x^8 + x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} = y$

Bài tương tự: $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + x - 2 = y^3 + 3y^2 + 4y & (1) \\ y^3 - x^2y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$

• *Ta có: (1)* $\Leftrightarrow x^3 + x = (y+1)^3 + y + 1$ *(3).*

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R. Do đó (3)* $\Leftrightarrow x = y + 1$.

Thay vào (2) ta được: $y^3 - (y+1)^3 y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(2;1), \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{y^4}{x^4} - \left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -2 & (1) \\ x^2 + y^6 - 8x + 6 = 0 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} x \ne 0 \\ y \ne 0 \end{cases}$. *Đặt* $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = t \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$, $\dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{y^4}{x^4} = t^4 - 4t^2 + 2$

Mặt khác, ta có: $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} \ge 2 \Rightarrow t^2 \ge 4 \Rightarrow |t| \ge 2$

Xét vế trái của (1), ta có: $g(t) = t^4 - 5t^2 + t + 4\ \ (|t| \ge 2) \Rightarrow g'(t) = 2t(2t^2 - 5) + 1$

+ *Với* $t \geq 2 \Rightarrow g'(t) > 0$ + *Với* $t \leq -2 \Rightarrow g'(t) < 0$

Dựa vào BBT, ta có $g(t) = -2 \Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow x = -y$

Thay vào (2) ta được: $x^6 + x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left[x^2(x+1)^2 + 2(x+1)^2 + 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1.$

Nghiệm: $(1;-1)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}(2x^2-1)(2y^2-1) = \dfrac{7}{2}xy \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0\end{cases}$

• *Dễ thấy* $xy = 0$ *không thoả HPT.*

Với $xy \neq 0$ *ta có: HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)\left(2y - \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{7}{2} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 & (2)\end{cases}$

+ *Điều kiện để (2) (ẩn x) có nghiệm là:* $\Delta_1 = (y-7)^2 - 4y^2 + 24y - 56 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$

+ *Điều kiện để (2) (ẩn y) có nghiệm là:* $\Delta_2 = (x-6)^2 - 4x^2 + 28x - 56 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \dfrac{10}{3}$

Xét hàm số $f(t) = 2t - \dfrac{1}{t} \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên* $(0;+\infty) \Rightarrow f(x).f(y) \geq f(2).f(1) = \dfrac{7}{2}$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}x = 2 \\ y = 1\end{cases}$.

Nghiệm: $(2;1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{x^4-16}{8x} = \dfrac{y^4-1}{y} & (1) \\ x^2 - 2xy + y^2 = 8 & (2)\end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases}x \neq 0 \\ y \neq 0\end{cases}$. *(1)* $\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{8} - \dfrac{2}{x} = y^3 - \dfrac{1}{y}$ *(*)*

Xét hàm số $f(t) = t^3 - \dfrac{1}{t}\ (t \neq 0) \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + \dfrac{1}{t^2} > 0, \forall t \neq 0 \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên các khoảng* $(-\infty;0), (0;+\infty)$. *Do đó:*

+ *Trên* $(-\infty;0)$: *(*)* $\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = y$. *Thay vào (2), ta được:* $y^2 = 8 \Leftrightarrow y = -2\sqrt{2} \Rightarrow x = -4\sqrt{2}$

+ *Trên* $(0;+\infty)$: *(*)* $\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = y$. *Thay vào (2), ta được:* $y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$

Nghiệm: $\left(-4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right), \left(4\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^3(3y+55) = 64 \\ xy(y^2+3y+3) = 12 + 51x\end{cases}$

• *Dễ thấy* $x = 0$ *không thoả HPT. Với* $x \neq 0$, *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}3y + 55 = t^3 \\ y^3 + 3y^2 + 3y = 3t + 51\end{cases}$ $\left(t = \dfrac{4}{x}\right)$

Cộng 2 phương trình, vế theo vế, ta được: $(y+1)^3 + 3(y+1) + 51 = t^3 + 3t + 51$ *(*)*

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t + 51 \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R. Do đó: (*)* $\Leftrightarrow y + 1 = t$.

Từ đó ta có: $t^3 - 3(y-1) - 55 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2+4t+13) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Nghiệm: $(1;3)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3(2+3y) = 1 & (1) \\ x(y^3-2) = 3 & (2) \end{cases}$

• *Dễ thấy* $x = 0$ *không thoả HPT. Với* $x \neq 0$ *ta có: HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+3y = \dfrac{1}{x^3} & (3) \\ y^3 = \dfrac{3}{x} + 2 & (4) \end{cases}$

Lấy $(3)+(4)$ *ta được:* $y^3 + 3y + 2 = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x} + 2$ *(*)*

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t + 2 \Rightarrow f(t)$ *đồng biến. Do đó (*)* $\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$

Nghiệm: $(-1;-1), \left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} x^3(2+3y) = 8 \\ x(y^3-2) = 6 \end{cases}$. *Nghiệm* $(1;2), (-2;-1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7 \end{cases}$

• *HPT* $\Rightarrow (1+x)(1+x^2)(1+x^4) + x^7 = (1+y)(1+y^2)(1+y^4) + y^7$ *(*)*

Xét hàm số $f(t) = (1+t)(1+t^2)(1+t^4) + t^7$.

Ta có: $f'(t) = 11t^6 + 3t^4(t+1)^2 + 2t^2(t+1)^2 + (t+1)^2 > 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R.*

Do đó: (*) $\Leftrightarrow x = y$. *HPT* $\Rightarrow (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+x^7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Nghiệm: $(0;0), (-1;-1)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x = 2 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} = -2 \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ *(*)*

Đặt $t = x+1,\ 0 \leq t \leq 2$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} = -2 & (2) \end{cases}$

Xét hàm số $f(a) = a^3 - 3a^2,\ 0 \leq a \leq 2$. $f'(a) = 3a^2 - 6a$, $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$.

Dựa vào BBT $\Rightarrow f(a)$ *nghịch biến trên* $[0;2]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(t) = f(y) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow x+1 = y$.

Nghiệm: $(0;1)$.

Bài 10. Giải các hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$

• *Đặt* $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u+\sqrt{u^2+1} = 3^v \\ v+\sqrt{v^2+1} = 3^u \end{cases}$

$\Rightarrow 3^u + u + \sqrt{u^2+1} = 3^v + v + \sqrt{v^2+1} \Leftrightarrow f(u) = f(v)$ *với* $f(t) = 3^t + t + \sqrt{t^2+1}$.

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + \dfrac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} > 0 \Rightarrow$ *f(t) đồng biến.*

$\Rightarrow u = v \Rightarrow u + \sqrt{u^2+1} = 3^u \Leftrightarrow u - \log_3\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = 0$ *(2)*

Xét hàm số: $g(u) = u - \log_3\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) \Rightarrow g'(u) > 0 \Rightarrow$ *g(u) đồng biến.*

Mà g(0) = 0 nên u = 0 là nghiệm duy nhất của (2).

Nghiệm: (1; 1).

Bài 11. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = 1 & (1) \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy+6x+1 & (2) \end{cases}$

• *Xét hàm số* $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$. *Ta có:* $f'(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} \geq 0, \forall t$

$\Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R.*

(1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} = -y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$.

(2) $\Leftrightarrow x\sqrt{6x+2x^2+1} = -4x^2+6x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1} - \dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}x^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\ (y=-1) \\ x = \dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\ (y = \dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}) \end{array}\right.$

Nghiệm: $(1;-1), \left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}} + 1 & (2) \end{cases}$

• *Dễ thấy* $x \neq 0$. *(1)* $\Leftrightarrow \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3 + \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = \sqrt{(3-2y)^3} + \sqrt{3-2y}$ *(*)*

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. *Ta có* $f'(t) = 3t^2+1 > 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R.*

Do đó (*) $\Leftrightarrow f\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = f\left(\sqrt{3-2y}\right) \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x} = \sqrt{3-2y}$. *Thay vào (2), ta được:*

$\left(\sqrt{x+2}-3\right) - \left(\sqrt[3]{15-x}-2\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}+3} + \dfrac{x-7}{\sqrt[3]{(15-x)^2}+2\sqrt[3]{15-x}+4} = 0$

$\Leftrightarrow x = 7\ (y = \dfrac{111}{98})$

Nghiệm: $\left(7; \dfrac{111}{98}\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_3(2x+1)-\log_3(x-y)=\sqrt{4x^2+4x+2}-\sqrt{(x-y)^2+1}-3x^2+y^2-4x-2xy-1 \quad (1) \\ \log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1}=1-\sqrt{2} \quad (2) \end{cases}$$

• *(1)* $\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2+1}-(2x+1)^2-\log_3(2x+1)=\sqrt{(x-y)^2+1}-(x-y)^2-\log_3(x-y)$ *(*)*

Xét hàm số: $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t^2-\log_3 t \ (t>0) \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\left(2t+\dfrac{1}{t\ln 3}\right)\le 0$

$\Rightarrow f(t)$ *nghịch biến. Do đó (*)* $\Leftrightarrow f(2x+1)=f(x-y) \Leftrightarrow 2x+1=x-y$ *(1)*

Với phương trình (2), xét hàm số: $f(x)=\log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1} \ (x>0)$

$\Rightarrow f'(x)=4x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)+\dfrac{1}{x\ln 3}>0 \Rightarrow f(x)$ *đồng biến.*

Mà $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\sqrt{2}$ *nên* $x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}$.

Nghiệm: $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22}-\sqrt{y}=y^2+2y+1 \quad (1) \\ \sqrt{y^2+2y+22}-\sqrt{x}=x^2+2x+1 \quad (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$. *Dễ thấy* $x=0$ *hoặc* $y=0$ *không thoả HPT, nên* $x>0, y>0$.

Lấy $(1)-(2)$ *ta được:*

$$\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}+x^2+2x+1=\sqrt{y^2+2y+22}+\sqrt{y}+y^2+2y+1 \quad (a)$$

Phương trình (a) có dạng: $f(x)=f(y)$ *với* $f(t)=\sqrt{t^2+2t+22}+\sqrt{t}+t^2+2t+1, (t>0)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+22}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+2t+2>0, \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ *đồng biến*

Do đó: (a) $\Leftrightarrow x=y$. *Thay vào (1) ta được:* $x^2+2x+1-\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}=0$ *(b)*

Phương trình (b) có dạng: $g(x)=g(1)$ *với* $g(t)=t^2+2t+1-\sqrt{t^2+2t+22}+\sqrt{t}$

Ta có: $g'(t)=2t+2+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+22}}>2-\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+22}}>0 \Rightarrow g(t)$ *đồng biến*

Do đó: (b) $\Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Nghiệm: $(1;1)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \quad (1) \\ x^2-2x=-2y^2-4y+3 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(1)-(2)$ *ta được:* $x^2+x\sqrt{x^2+1}=(y+1)^2+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1}$ *(3)*

Xét hàm số: $f(t)=t^2+t\sqrt{t^2+1}$. *Ta có:* $f'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>2t+2|t|\ge 0, \forall t$

$\Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R. Do đó (3)* $\Leftrightarrow x=y+1$.

Nghiệm: $(-1;-2),\left(\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^2 & (1)\\ (x-1)^4=y & (2)\end{cases}$

• *Điều kiện:* $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 0\end{cases}$.

Thế (2) vào (1) ta được: $\sqrt{x-1}-(x-1)^2=8-x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=-x^3+x^2-2x+9$ *(3)*

+ *Xét hàm số* $f(x)=-x^3+x^2-2x+9,\ x\ge 1$. *Ta có:* $f'(x)=-3x^2+2x-2<0, \forall x\ge 1$

$\Rightarrow f(x)$ *nghịch biến khi* $x\ge 1$

+ *Xét hàm số* $g(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow g(x)$ *đồng biến khi* $x\ge 1$

Mặt khác, $f(2)=g(2)$ *nên* $x=2$ *là nghiệm duy nhất của (3)*

Nghiệm: $(2;1)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$

• *Dễ thấy* $y\ne 0$. *Khi đó (1)* $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^5+\frac{x}{y}=y^5+y$ *(*)*

Xét hàm số $f(t)=t^5+t \Rightarrow f'(t)=5t^4+1>0, \forall t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R*

Do đó (*) $\Leftrightarrow \frac{x}{y}=y \Leftrightarrow x=y^2$. *Thay vào (2) ta được:* $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6 \Leftrightarrow x=1$

Nghiệm: $(1;1),(1;-1)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 & (1)\\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1 & (2)\end{cases}$

• *Ta có: (1)* $\Leftrightarrow \left(\sqrt{(2-x)^2}+1\right)\sqrt{2-x}=\left(\sqrt{(2y-1)^2}+1\right)\sqrt{2y-1}$ *(*)*

Xét hàm số $f(t)=(t^2+1)t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến.*

Do đó (*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x=3-2y$

Nghiệm: $(1;1),\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2};\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2} & (1)\\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 & (2)\end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow 2(2x+1)^3+2x+1=2\sqrt{(y-2)^3}+\sqrt{y-2}$ *(*)*

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến.*

Do đó (*) $\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{y-2} \Leftrightarrow y=4x^2+4x+3$

Nghiệm: $\left(\frac{1}{2};6\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}y^3+y=x^3+3x^2+4x+2 & (1)\\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 & (2)\end{cases}$

• *(1)* $\Leftrightarrow y^3 + y = (x+1)^3 + x + 1$ *(*). Xét hàm số* $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến.*

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x + 1$

Nghiệm: $(0;1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $-4 \le x \le 1$. *Ta có: (1)* $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$ *(3)*

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R. Do đó (3)* $\Leftrightarrow y = \sqrt{1-x}$.

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4}$ *(4)*

Ta có: VT của (4) là hàm số nghịch biến trên $(-4;1)$, *VP của (4) là hàm số đồng biến trên* $(-4;1)$, *nên (4) có nghiệm duy nhất* $x = -3$.

Nghiệm: $(-3;2)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(4x^2+1) - y\sqrt{2y-1} = 0 & (1) \\ -2x^2 + xy + 3x - \sqrt{\dfrac{x}{2} + 2} = 0 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $x \ge -4, y \ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x(4x^2+1) - y\sqrt{2y-1} = 0 \Leftrightarrow 2x(4x^2+1) = 2y\sqrt{2y-1} = 0$

$$\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{2y-1})^3 + \sqrt{2y-1} \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$, *từ đó*

$$(3) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 4x^2 + 1 = 2y \quad (x \ge 0)$$

Thay vào (2) ta được:

$$-4x^2 + x(4x^2+1) + 6x - \sqrt{2x+8} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 + 7x - \sqrt{2x+8} = 0 \qquad (4)$$

Xét hàm số $g(x) = -4x^2 + 4x^3 + 7x - \sqrt{2x+8}$ *có*

$$g'(x) = 12x^2 - 8x + 7 - \frac{1}{\sqrt{2x+8}} = 4x^2 + 2(2x-1)^2 + \frac{5\sqrt{2x+8} - 1}{\sqrt{2x+8}} > 0, \forall x \ge 0$$

nên $g(x)$ *đồng biến trên nửa khoảng* $[0;+\infty)$. *Mà* $g(x) = g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *nên (4)* $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Nghiệm: $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - y = \cos x - \cos y \\ x^2y - 3y - 18 = 0 \end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x - \cos x = y - \cos y & (1) \\ x^2y - 3y - 18 = 0 & (2) \end{cases}$.

Xét hàm số $f(t) = t - \cos t \Rightarrow f'(t) = 1 + \sin t \ge 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R.*

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. *Thay vào (2) ta được:* $x^3 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Nghiệm: $(3;3)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình sau:

•

Vấn đề 5: Hệ phương trình hoán vị vòng quanh

Để giải các hệ phương trình hoán vị vòng quanh $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$, *thường sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh x = y = z.*

– Xét tính đơn điệu hàm số f(t).

– Chứng tỏ x < y, x > y, … không xảy ra.

– Từ đó suy ra x = y = z. Thế vào hệ đã cho để giải tìm x, y, z.

Bài 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ y+z=2 & (2) \\ z+x=3 & (3) \end{cases}$

• *Cộng 3 phương trình, vế theo vế, ta được:* $x+y+z=3 \quad (4)$

Từ (4) và (1) $\Rightarrow z = 2$; *từ (4) và (2)* $\Rightarrow x = 1$; *từ (4) và (3)* $\Rightarrow y = 0$.

Thử lại $\Rightarrow$ *Nghiệm (x; y; z): (1; 0; 2).*

Bài 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2xy = x+y+1 \\ 2yz = y+z+7 \\ 2zx = z+x+2 \end{cases}$

• $\begin{cases} 2xy = x+y+1 \\ 2yz = y+z+7 \\ 2zx = z+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(2y-1)=3 \\ (2y-1)(2z-1)=15 \\ (2z-1)(2x-1)=5 \end{cases} \quad (*)$

Nhân các phương trình trên, vế theo vế, ta được:

$$(2x-1)^2(2y-1)^2(2z-1)^2 = 225 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (2x-1)(2y-1)(2z-1)=15 & (a) \\ (2x-1)(2y-1)(2z-1)=-15 & (b) \end{array}\right.$$

Kết hợp với (*) ta được:

+ Trường hợp (a) $\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2y-1=3 \\ 2z-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

+ Trường hợp (b) $\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=-1 \\ 2y-1=-3 \\ 2z-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$

Thử lại $\Rightarrow$ *Nghiệm (x; y; z):* $(1;2;3), (0;-1;-2)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} x+xy+y=1 \\ y+yz+z=3 \\ z+zx+x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=2 \\ (y+1)(z+1)=4 \\ (z+1)(x+1)=8 \end{cases}$. *Nghiệm:* $(1;0;3), (-3;-2;-5)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2z \\ (z-1)^2 = 2x \end{cases} \quad (I)$

• *Từ (I)* $\Rightarrow x, y, z \ge 0$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên* $(1;+\infty)$, *nghịch biến trên* $[0;1]$.

Khi đó HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$.

Từ hệ (I) ta suy ra được: + nếu $x<1$ *thì* $y<1, z<1$ *+ nếu* $x>1$ *thì* $y>1, z>1$

Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của $f(t)$ *ta chứng minh được* $x=y=z$.

Khi đó: $(x-1)^2=2x \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$.

Nghiệm: $\left(2-\sqrt{3};2-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right),\left(2+\sqrt{3};2+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} x^2=y+1 \\ y^2=z+1 \\ z^2=x+1 \end{cases}$. *Nghiệm:* $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5=y \\ y^3+3y^2+2y-5=z \\ z^3+3z^2+2z-5=x \end{cases}$

• *Giả sử* $x=\max\{x,y,z\}$. *Xét 2 trường hợp:*

a) $x\ge y\ge z$.

Từ HPT ta có: $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5\le x \\ z^3+3z^2+2z-5\ge z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)\left[(x+2)^2+1\right]\le 0 \\ (z-1)\left[(z+2)^2+1\right]\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ z\ge 1 \end{cases}$

b) $x\ge z\ge y$.

Từ HPT ta có: $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5\le x \\ y^3+3y^2+2y-5\ge y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)\left[(x+2)^2+1\right]\le 0 \\ (y-1)\left[(y+2)^2+1\right]\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ y\ge 1 \end{cases}$

Cả 2 trường hợp đều cho: $x=y=z=1$. *Thử lại thấy* $x=y=z=1$ *là nghiệm của HPT.*

Nghiệm: $(1;1;1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}$

• *Xét hàm số* $f(t)=t^3+3t-3+\ln(t^2-t+1) \Rightarrow f'(t)=3t^2+1+\frac{2t-1}{t^2-t+1}>0, \forall t$

$\Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên R. Khi đó HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=y \\ f(y)=z \\ f(z)=x \end{cases}$.

Giả sử $x=\min(x,y,z)$. *Khi đó* $x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y) \Rightarrow y\le z \Rightarrow f(y)\le f(z) \Rightarrow z\le x$

$\Rightarrow x\le y\le z\le x \Rightarrow x=y=z$.

Với $x=y=z$ *ta có:* $x^3+2x-3+\ln(x^2-x+1)=0$ *(*)*

Hàm số $g(x)=x^3+2x-3+\ln(x^2-x+1)$ *đồng biến và* $g(1)=0$ *nên (*) có nghiệm duy nhất* $x=1$.

Nghiệm: $(1;1;1)$.

Bài tương tự:

a) $\begin{cases} 2x+1=y^3+y^2+y \\ 2y+1=z^3+z^2+z \\ 2z+1=x^3+x^2+x \end{cases}$. *Xét hàm số* $f(t)=\frac{t^3+t^2+t-1}{2}$. *Nghiệm:* $(1;1;1),(-1;-1;-1)$.

b) $\begin{cases} x^3-3x^2+5x+1=4y \\ y^3-3y^2+5y+1=4z \\ z^3-3z^2+5z+1=4x \end{cases}$. *Xét hàm số* $f(t)=t^3-3t^2+5t+1$.

Nghiệm: $(1;1;1)$, $\left(1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{2}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x)=z \end{cases}$

• *Điều kiện* $x,y,z\le 6$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} \\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} \\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} \end{cases}$ *(a)*

Xét các hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$, $g(t)=\log_3(6-t)$ *với* $t<6$. *Ta có:*

+ $f'(t)=\dfrac{6-t}{\sqrt{t^2-2t+6}}>0,\forall t<6 \Rightarrow f(t)$ *đồng biến*

+ $g'(t)=\dfrac{1}{t-6}<0,\ \forall t<6 \Rightarrow g(t)$ *nghịch biến*

Khi đó: (a) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$

Giả sử $x=\min(x,y,z)$. *Khi đó* $x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y) \Rightarrow g(y)\le g(z) \Rightarrow y\ge z$

$\Rightarrow f(y)\ge f(z) \Rightarrow g(z)\ge g(x) \Rightarrow z\le x \Rightarrow f(z)\le f(x) \Rightarrow g(x)\le g(y) \Rightarrow x\ge y$

$\Rightarrow x=y=z$.

Với $x=y=z$ *ta có:* $\log_3(6-x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ *(b)*

Hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$ *đồng biến,* $g(t)=\log_3(6-t)$ *nghịch biến và* $f(3)=g(3)=1$ *nên (b) có nghiệm duy nhất* $x=3$.

Nghiệm: $(3;3;3)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình sau:

•

Vấn đề 6: Hệ phương trình giải được bằng phương pháp lượng giác hoá

- *Nếu* $|x| \le a \ (a > 0)$ *ta đặt* $x = a\cos\alpha$ *với* $\alpha \in [0;\pi]$.
- *Nếu* $x^2 + y^2 = a \ (a > 0)$ *ta đặt* $x = \sqrt{a}\sin\alpha,\ y = \sqrt{a}\cos\alpha$ *với* $\alpha \in [0;2\pi]$.
- *Với mọi số thực x luôn có một số* α *với* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ *sao cho* $x = \tan\alpha$.

Bài 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 & (1) \\ (1-x)(1-y) = 2 & (2) \end{cases}$

- *Điều kiện:* $\begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ 1-y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$. *Đặt* $x = \cos\alpha,\ y = \cos\beta$ *với* $\alpha, \beta \in [0;\pi]$.

Khi đó: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha.\sin\beta + \cos\beta.\sin\alpha = 1 \\ (1-\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0 \quad (3) \end{cases}$

Đặt $t = \sin\alpha - \cos\alpha,\ |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow t - \frac{1-t^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1$

Với $t = 1$ *ta có:* $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Nghiệm: $(0;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

- *Do* $x^2 + y^2 = 1$ *nên* $x, y \in [-1;1]$. *Đặt* $x = \sin\alpha, y = \cos\alpha$ *với* $\alpha \in [0;2\pi]$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)(1 + 2\sin 2\alpha) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin 2\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 8\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) - 4\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) - 2\left[\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right] = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -2\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \\ \alpha = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \ (k \in Z)$$

Vì $\alpha \in [0;2\pi]$ *nên* $\alpha \in \left\{\frac{13\pi}{36}, \frac{37\pi}{36}, \frac{51\pi}{36}, \frac{17\pi}{36}, \frac{41\pi}{36}, \frac{65\pi}{36}\right\}$

Nghiệm: $(x;y)\in\left\{\begin{array}{l}\left(\sin\frac{13\pi}{36};\cos\frac{13\pi}{36}\right),\left(\sin\frac{37\pi}{36};\cos\frac{37\pi}{36}\right),\left(\sin\frac{51\pi}{36};\cos\frac{51\pi}{36}\right),\\ \left(\sin\frac{17\pi}{36};\cos\frac{17\pi}{36}\right),\left(\sin\frac{41\pi}{36};\cos\frac{41\pi}{36}\right),\left(\sin\frac{65\pi}{36};\cos\frac{65\pi}{36}\right)\end{array}\right\}$

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2x+x^2y=y\\2y+y^2z=z\\2z+z^2x=x\end{cases}$ (I)

• *Từ các phương trình của hệ ta suy ra* $x,y,z\neq\pm1$.

Do đó: (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2} & (1)\\ z=\dfrac{2y}{1-y^2} & (2)\\ x=\dfrac{2z}{1-z^2} & (3)\end{cases}$.

Đặt $x=\tan\alpha$ *với* $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ *sao cho* $\tan\alpha,\tan2\alpha,\tan4\alpha\neq\pm1$.

Khi đó ta có: $\begin{cases}y=\tan2\alpha\\z=\tan4\alpha\\x=\tan8\alpha\end{cases}\Rightarrow\tan8\alpha=\tan\alpha\Rightarrow\alpha=k\frac{\pi}{7}\ (k\in Z)$

Vì $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ *nên* $k=0,\pm1,\pm2,\pm3$.

Nghiệm: $(x;y;z)\in\left\{\left(\tan\frac{k\pi}{7};\tan\frac{k2\pi}{7};\tan\frac{k4\pi}{7}\right),k\in Z,-3\le k\le3\right\}$.

Bài 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x-3z^2x-3z+z^3=0\\y-3x^2y-3x+x^3=0\\z-3y^2z-3y+y^3=0\end{cases}$

• *HPT* $\Leftrightarrow\begin{cases}x(1-3z^2)=3z-z^3\\y(1-3x^2)=3x-x^3\\z(1-3y^2)=3y-y^3\end{cases}$ *(I). Từ hệ suy ra* $x,y,z\neq\pm\frac{1}{\sqrt3}$.

Do đó: (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2} & (1)\\ y=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} & (2)\\ z=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} & (3)\end{cases}$ *(II)*

Đặt $x=\tan\alpha$ *với* $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ *sao cho* $\tan\alpha,\tan3\alpha,\tan9\alpha\neq\pm\frac{1}{\sqrt3}$.

Khi đó ta có: $\begin{cases}y=\tan3\alpha\\z=\tan9\alpha\\x=\tan27\alpha\end{cases}\Rightarrow\tan27\alpha=\tan\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{k\pi}{26},(k\in Z)$

Vì $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ *nên* $|k| \le 12$.

Nghiệm: $(x;y;z) \in \left\{\left(\tan\frac{k\pi}{26};\tan\frac{k3\pi}{26};\tan\frac{k9\pi}{26}\right), k \in Z, -12 \le k \le 12\right\}$.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$

- *Nhận xét:* $xyz \ne 0$ *và* x,y,z *cùng dấu. Nếu* $(x;y;z)$ *là một nghiệm của HPT thì* $(-x;-y;-z)$ *cũng là nghiệm của hệ, nên ta sẽ tìm nghiệm* x,y,z *dương của hệ.*

Đặt $x=\tan\alpha,\ y=\tan\beta,\ z=\tan\gamma\ (0<\alpha,\beta,\gamma<90^0)$.

Khi đó: HPT trở thành: $\begin{cases} 3\left(\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}\right)=4\left(\tan\beta+\frac{1}{\tan\beta}\right)=5\left(\tan\gamma+\frac{1}{\tan\gamma}\right) & (1) \\ \tan\alpha.\tan\beta+\tan\beta.\tan\gamma+\tan\gamma.\tan\alpha=1 & (2) \end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3\left(\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\right)=4\left(\frac{1+\tan^2\beta}{\tan\beta}\right)=5\left(\frac{1+\tan^2\gamma}{\tan\gamma}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2\alpha}=\frac{4}{\sin 2\beta}=\frac{5}{\sin 2\gamma}$

Từ (2) $\Rightarrow \tan\gamma(\tan\alpha+\tan\beta)=1-\tan\alpha\tan\beta \Rightarrow \cot\gamma=\tan(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \tan\left(90^0-\gamma\right)=\tan(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=90^0$

Do đó: $\begin{cases} \frac{3}{\sin 2\alpha}=\frac{4}{\sin 2\beta}=\frac{5}{\sin 2\gamma} \\ 0<\alpha,\beta,\gamma<90^0;\ \alpha+\beta+\gamma=90^0 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha,2\beta,2\gamma$ *là các góc của một tam giác có độ dài 3 cạnh là 3, 4, 5.*

Do tam giác có độ dài 3 cạnh là 3, 4, 5 là tam giác vuông nên:

$$2\gamma=90^0 \Rightarrow \gamma=45^0 \Rightarrow z=\tan\gamma=1$$

$+\ \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$+\ \tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2y}{1-y^2}=\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$.

Nghiệm: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right),\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};-1\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình sau:

- *HPT*

Vấn đề 7: Hệ phương trình chứa tham số

Bài 1. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y - x^2 + y = 2 \\ m(x^2+y) - x^2y = 4 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt.

• *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x^4 + 2(m-3)x^2 + 2m - 4 = 0 \quad (1) \\ y = \dfrac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases}$.

+ Khi m = 1: Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 = 0 \\ y = \dfrac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases} \quad (VN)$

+ Khi $m \neq 1$. *Đặt* $t = x^2$, $t \geq 0$. *Xét* $f(t) = (m-1)t^2 + 2(m-3)t + 2m - 4 = 0 \quad (2)$

Hệ PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ *(1) có ba nghiệm x phân biệt*

$\Leftrightarrow$ *(2) có một nghiệm t = 0 và 1 nghiệm t > 0* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ S = \dfrac{2(m-3)}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow m = 2$.

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = m \end{cases} \quad (I)$

• *+ Với* $y = 0$ *HPT trở thành:* $\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x^2 = m \end{cases}$. *Hệ có nghiệm khi* $m = \dfrac{1}{2}$.

+ Với $y \neq 0$. *Đặt* $\dfrac{x}{y} = t$. *(I) trở thành:* $\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \dfrac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = \dfrac{m}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \dfrac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = m(2t^2 + t - 1) \end{cases} \quad (II)$

Do đó (I) có nghiệm $(x;y) \Leftrightarrow$ *(II) có nghiệm* $(t;y)$.

Xét hệ (II), từ $2t^2 + t - 1 = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow 2t^2 + 1 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Do đó (II) có nghiệm $(t;y) \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+t+1}{2t^2+t-1}$ *có nghiệm* $t \in (-\infty;-1) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+t+1}{2t^2+t-1}$, $t \in (-\infty;-1) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(t) = -\dfrac{t^2+6t+2}{(2t^2+t-1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3-\sqrt{7} \\ t = -3+\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Dựa vào BBT của hàm số $f(t)$ *suy ra HPT có nghiệm khi* $m \geq \dfrac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}$.

Bài 3. Biết $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 6 - m^2 \end{cases}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A = xy + 2(x+y)$.

• *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m \\ xy=m^2-3 \end{cases}$ *(I).*

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow S^2-4P\ge 0 \Leftrightarrow m^2-4m^2+12\ge 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$

$A=P+2S=m^2+2m-3$. *Bài toán tìm lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số với* $m\in[-2;2]$

Đạo hàm $A'=2m+2$, $A'=0\Leftrightarrow m=-1$

Tìm được $\max A=5$, *tại* $m=2$ *hay* $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

$\min A=-4$, *tại* $m=-1$ *hay* $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$.

Bài 4. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} xy+x+y=m+2 \\ x^2y+xy^2=m+1 \end{cases}$

• *Nếu* $(x_0;y_0)$ *là nghiệm của hệ thì* $(y_0;x_0)$ *cũng là nghiệm của hệ.*

Vậy nếu hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0=y_0$.

Khi đó, hệ trở thành: $\begin{cases} x_0^2+2x_0=m+2 \\ 2x_0^3=m+1 \end{cases} \Rightarrow x_0^2+2x_0=2x_0^3+1 \Leftrightarrow 2x_0^3-x_0^2-2x_0+1=0$

1) $x_0=1\Rightarrow m=1$ *2)* $x_0=-1\Rightarrow m=-3$ *3)* $x_0=\frac{1}{2}\Rightarrow m=-\frac{3}{4}$

Ngược lại:

1) $m=1$, *hệ trở thành* $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ x^2y+xy^2=2 \end{cases} \to \begin{cases} S+P=3 \\ SP=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases}$ *(I) hoặc* $\begin{cases} S=1 \\ P=2 \end{cases}$ *(II)*

Hệ (I) có nghiệm $(1;1)$, *hệ (II) vô nghiệm. Như vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất.*

2) $m=-3$, *hệ trở thành* $\begin{cases} xy+x+y=-1 \\ x^2y+xy^2=-2 \end{cases} \to \begin{cases} S+P=-1 \\ SP=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-2 \\ P=1 \end{cases}$ *(I) v* $\begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases}$ *(II)*

Hệ (I) có nghiệm $(-1;-1)$, *hệ (II) có nghiệm* $(-1;2),(2;-1)$. *Như vậy, hệ đã cho có 3 nghiệm.*

3) $m=-\frac{3}{4}$, *hệ trở thành* $\begin{cases} xy+x+y=\frac{5}{4} \\ x^2y+xy^2=\frac{1}{4} \end{cases} \to \begin{cases} S+P=\frac{5}{4} \\ SP=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=\frac{1}{4} \end{cases}$ *(I) v* $\begin{cases} S=\frac{1}{4} \\ P=1 \end{cases}$ *(II)*

Hệ (I) có nghiệm $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, *hệ (II) vô nghiệm. Như vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất.*

ĐS: $m\in\left\{1;-\frac{3}{4}\right\}$.

Bài 5. Tìm *m* để hệ phương trình sau: $\begin{cases} x=y^2-y+m \\ y=x^2-x+m \end{cases}$

a) có nghiệm b) có nghiệm duy nhất.

• *HPT* $\Rightarrow x-y=y^2-x^2+x-y \Leftrightarrow x-y=(x-y)(1-x-y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y=0 \end{array}\right.$

*a) *) Với* $x=y$, *ta được* $x=x^2-x+m \Leftrightarrow x^2-2x+m=0$ *(1)*

**) Với* $x=-y$, *ta được* $x=x^2+x+m \Leftrightarrow x^2+m=0$ *(2)*

Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ *một trong 2 pt có nghiệm* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_1' = 1-m \ge 0 \\ \Delta_2 = -4m \ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 1$

b) Nếu $(x_0;\, y_0)$ *là nghiệm của hệ thì* $(y_0; x_0)$ *cũng là nghiệm của hệ.*

Vậy nếu hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó, ta có: $x_0 = x_0^2 - x_0 + m \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + m = 0$ *(*)*

Phương trình (*) có nghiệm x_0 *duy nhất* $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m = 0$.

Thử lại, $m = 1$ *hệ trở thành:* $\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y = 0\end{array}\right.$

* *Với* $x = y$ *: ta có* $x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$, *nghiệm duy nhất.*

* *Với* $x = -y$ *: ta có* $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$, *vô nghiệm*

ĐS: $m = 1$.

Bài 6. Chứng tỏ rằng với $m \ne 0$ thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{m^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{m^2}{x}\end{cases}$$

• *Với* $m \ne 0 \Rightarrow y, \dfrac{m^2}{y}$ *cùng dấu, mặt khác* $2x^2 \ge 0$ *nên* $y > 0$. *Tương tự* $x > 0$.

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y = y^2 + m^2 \\ 2y^2x = x^2 + m^2\end{cases} \Rightarrow 2xy(x-y) = (y-x)(y+x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y + 2xy = 0 \quad (*)\end{array}\right.$

(*) vô nghiệm vì $x > 0, y > 0$

Vậy HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^3 - x^2 = m^2 \quad (1)\end{cases}$, *ta chỉ cần chứng tỏ hệ này có nghiệm duy nhất.*

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2$, $f'(x) = 6x^2 - 2x$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{27}$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT, đường thẳng $y = m^2$ *cắt đồ thị hàm số tại một điểm duy nhất có hoành độ dương hay phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất khi và chỉ khi* $m^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne 0$.

Bài 7. Chứng tỏ rằng với $m > 0$ thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 3x^2y - 2y^2 - m = 0 & (1) \\ 3y^2x - 2x^2 - m = 0 & (2)\end{cases}$$

• *Nếu* $y \le 0$ *thì VT của (1) âm* $\Rightarrow$ *(1) không thỏa mãn , suy ra* $y > 0$. *Tương tự* $x > 0$.

Lấy $(1) - (2)$ *, ta được:* $3x^2y - 3y^2x + 2x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3xy + 2x + 2y) = 0$ *(3)*

Vì x , y > 0 nên (3) $\Leftrightarrow$ $x = y$. *Thay vào (1) ta được:* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 = m$

$f'(x) = 9x^2 - 4x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{4}{9}$

Dựa vào BBT ta thấy với mọi $m > 0$ *phương trình* $f(x) = m$ *có nghiệm* $x > 0$ *duy nhất.*

Bài 8. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ (D – 2004)

• *Đặt* $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ $(u \geq 0,\ v \geq 0)$. *Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = m \end{cases}$.

ĐS: $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$.

Bài 9. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} 2y - x = m & (1) \\ y + \sqrt{xy} = 1 & (2) \end{cases}$

• *Từ (1)* $\Rightarrow x = 2y - m$, *nên (2)* $\Leftrightarrow \sqrt{2y^2 - my} = 1 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ m = y - \frac{1}{y} + 2 \end{cases}$ *(vì* $y \neq 0$*)*

Xét $f(y) = y - \frac{1}{y} + 2 \Rightarrow f'(y) = 1 + \frac{1}{y^2} > 0$

Dựa vào BTT ta kết luận được hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m > 2$.

ĐS: $m > 2$.

Bài 10. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = m & (1) \\ x + y = m^2 - 4m + 6 & (2) \end{cases}$ (I)

• *Đặt* $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y-1} \end{cases}$ $(u, v \geq 0)$, *ta được hệ* $\begin{cases} u + v = m \\ u^2 + v^2 = m^2 - 4m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ uv = 2m - 3 \end{cases}$ *(II)*

Hệ (I) có nghiệm $(x; y) \Leftrightarrow$ *hệ (II) có nghiệm* $(u; v)$ *với* $u \geq 0; v \geq 0$

Ta biết u, v *là nghiệm của phương trình* $f(t) = t^2 - mt + 2m - 3 = 0$ *(*), nên hệ (II) có nghiệm* $u \geq 0, v \geq 0$ *khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép không âm hay có hai nghiệm phân biệt không âm*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 4P \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 12 \geq 0 \\ m \geq 0 \\ 2m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2,\ m \geq 6 \\ m \geq 0 \\ m \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 6 \\ \frac{3}{2} \leq m \leq 2 \end{array} \right.$$

ĐS: $\frac{3}{2} \leq m \leq 2 \vee m \geq 6$.

Bài 11. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m \\ 2y + \sqrt{x-1} = m \end{cases}$.

• *Đặt* $u = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow x = u^2 + 1$, $v = \sqrt{y-1} \geq 0 \Rightarrow y = v^2 + 1$

HPT trở thành: $\begin{cases} 2u^2 + 2 + v = m \\ 2v^2 + 2 + u = m \end{cases}$ *(II)*

Vì $u \geq 0,\ v \geq 0$ *nên điều kiện cần để hệ có nghiệm là* $m \geq 2$.

Ngược lại với $m \geq 2$ *thì:*

(II) $\Rightarrow (u-v)(2u+2v-1)=0$. *Hệ (II)* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=v \\ 2u^2+u+2-m=0 \end{cases} \quad (A) \\ \begin{cases} 2u+2v-1=0 \\ 2u^2+v+2-m=0 \end{cases} \quad (B) \end{array}\right.$

Với hệ (A), PT: $2u^2+u+2-m=0$ *có* $P=\dfrac{2-m}{2}\le 0$ *(vì* $m\ge 2$*) nên có nghiệm* u_0.

Khi đó hệ (II) có nghiệm $u=v=u_0 \Rightarrow$ *hệ ban đầu có nghiệm* $x=y=u_0^2+1$.

ĐS: $m\ge 2$.

Chú ý: Ta không cần xét hệ (B), vì chỉ cần (A) có nghiệm thì hệ ban đầu có nghiệm.

Bài 12. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{3-y}=m & (1) \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{3-x}=m & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện:* $-1\le x,y\le 3$.

Lấy $(1)-(2)$ *ta được:* $\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{y+1}-\sqrt{3-y}$ (3)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{3-t} \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên* $(-1;3)$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow x=y$. *Thay vào (1) ta được:* $g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=m$ *(4)*

HPT có nghiệm $\Leftrightarrow$ *(4) có nghiệm*

$g(x)$ *là hàm số liên tục trên* $[-1;3]$ *và* $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}, g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Dựa vào BBT ta có (4) có nghiệm $\Leftrightarrow 2\le m\le 2\sqrt{2}$

Kết luận: $2\le m\le 2\sqrt{2}$.

Bài 13. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 & (1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0 & (2) \end{cases}$

• *Điều kiện* $-1\le x\le 1;\ 0\le y\le 2$. *Khi đó* $-1\le y-1\le 1$ *nên:*

$(1)\Leftrightarrow x^3-3x=(y-1)^3-3(y-1) \Leftrightarrow f(x)=f(y-1)$ *trong đó* $f(t)=t^3-3t, t\in[-1;1]$

Ta có: $f'(t)=3t^2-3\ge 0 \forall t\in[-1;1] \Rightarrow f(t)$ *đồng biến trên đoạn* $[-1;1]$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x=y-1$, *thế vào (2) ta được* $m=2\sqrt{2y-y^2}+2y-y^2-1$.

Đặt $t=\sqrt{2y-y^2}$, *vì* $0\le y\le 2$ *nên* $0\le t\le 1$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow m=f(t)$ *với* $f(t)=t^2+2t-1, t\in[0;1]$.

Xét hàm số $g(t)=t^2+2t-1$ *trên đoạn* $[0;1]$, *ta có* $g'(t)=2t+2$, $g'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra bảng biến thiên của $g(t)=t^2+2t-1$ *trên đoạn* $[0;1]$ *là:*

x	0		1
g'(x)	‖	+	‖
g(x)	-1	↗	2

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị cần tìm của m là $m\in[-1;2]$.

Bài 14. Tìm *m* để hệ phương trình sau:

•

Vấn đề 8: Giải phương trình bằng cách đưa về hệ phương trình

Bài 1. Giải phương trình sau: $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$

• *Đặt* $2^x = u > 0; \sqrt[3]{2^{x+1} - 1} = v$.

Ta được hệ $\begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ v^3 + 1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v > 0 \\ u^3 - 2u + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Bài 2. Giải phương trình sau: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

• *Đặt* $y = \sqrt[3]{2x - 1}$. *Ta được hệ* $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \Rightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 2) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x - 2} + 3\sqrt{6 - 5x} - 8 = 0$

• *Đặt* $u = \sqrt[3]{3x - 2},\ v = \sqrt{6 - 5x},\ v \geq 0$ (*).

Ta có hệ: $\begin{cases} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{8 - 2u}{3} \\ 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -2.$

Bài 4. Giải phương trình sau:

•

ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Bài 1. (ĐH 2002B) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$.

ĐS: $(1;1), \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

Bài 2. (ĐH 2003A) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$.

ĐS: $(1;1), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 3. (ĐH 2003B) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$.

ĐS: (1; 1)

Bài 4. (ĐH 2004D) Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$

ĐS: $0 \le m \le \frac{1}{4}$

Bài 5. (ĐH 2004A–db1) Gọi (*x; y*) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$ (*m* là tham số). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 - 2x$, khi *m* thay đổi.

ĐS:

Bài 6. (ĐH 2005A–db1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$.

ĐS: $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, (1;–2), (–2;1)

Bài 7. (ĐH 2005A–db2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$.

ĐS: (2;–1)

Bài 8. (ĐH 2006A) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$.

ĐS: (3; 3). *Đặt* $t = \sqrt{xy}$.

Bài 9. (ĐH 2006A–db1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$.

ĐS: (1;2), (–2;5)

Bài 10. (ĐH 2006A–db2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2+1) \end{cases}$.

ĐS: $(3;1), (-3;-1), \left(-4\sqrt{\frac{6}{13}};\sqrt{\frac{6}{13}}\right), \left(4\sqrt{\frac{6}{13}};-\sqrt{\frac{6}{13}}\right)$.

Chú ý: $3(x^3 - y^3) = 6(4x + y) = (x^2 - 3y^2)(4x + y)$.

Bài 11. (ĐH 2006B–db2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13\\(x+y)(x^2-y^2)=25\end{cases}$.

ĐS: $(3;2), (-2;-3)$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases}x^3-y^3=19\\xy(x-y)=6\end{cases}$.

Bài 12. (ĐH 2006D–db1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-xy+y^2=3(x-y)\\x^2+xy+y^2=7(x-y)^3\end{cases}$.

ĐS: $(2;1), (-1;-2)$. *Đặt* $\begin{cases}u=x-y\\v=xy\end{cases}$.

Bài 13. (ĐH 2007D) Tìm giá trị của tham số *m* để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10\end{cases}.$$

ĐS: $\frac{7}{4} \le m \le 2 \vee m \ge 22$. *Đặt* $\begin{cases}u=x+\dfrac{1}{x}\\v=y+\dfrac{1}{y}\end{cases}$ $\left(|u|\ge 2, |v|\ge 2\right)$. *Dùng PP hàm số.*

Bài 14. (ĐH 2007A–db2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^4-x^3y+x^2y^2=1 & (1)\\x^3y-x^2+xy=1 & (2)\end{cases}$.

ĐS: $(1;1), (-1;-1)$. *Đặt* $\begin{cases}u=x^2-xy\\v=x^3y\end{cases}$. *Cách 2: Hệ PT* $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2(x^2-1)=0\\xy-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm1\\xy=1\end{cases}$

Bài 15. (ĐH 2007B–db2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y\\y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x\end{cases}$.

ĐS: $(0;0), (1;1)$. *Cộng 2 PT vế theo vế, ta được:*

$$VT = 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\right) = x^2+y^2 = VP$$

Mà $|VT| \le 2|xy| \le x^2+y^2 = VP$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\x=y=1\end{array}\right.$.

Bài 16. (ĐH 2007D–db2) Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}2x-y-m=0\\x+\sqrt{xy}=1\end{cases}$

ĐS: $m > 2$. *PT* $\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\x^2+(2-m)x-1=0\end{cases}$. *Dùng tam thức bậc hai.*

Bài 17. (ĐH 2008A) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

ĐS: $\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right),\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$. *Đặt* $\begin{cases} u=x^2+y \\ v=xy \end{cases}$.

Bài 18. (ĐH 2008B) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}$.

ĐS: $\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)$. *HPT* $\Rightarrow x(x+4)^3=0 \Rightarrow x=-4\ (x\neq 0)$.

Bài 19. (ĐH 2008D) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$.

ĐS: (5; 2). *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-2y-1)=0 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$. *Chú ý* $x+y>0$.

Bài 20. (ĐH 2009B) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$.

ĐS: $\left(1;\dfrac{1}{3}\right),(3;1)$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{y} \\ v=\dfrac{x}{y} \end{cases}$.

Bài 21. (ĐH 2009D) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$.

ĐS: $(1;1),\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)$. *HPT* $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-\dfrac{3}{x}=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases} u=x+y \\ v=\dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Bài 22. (ĐH 2010A)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases}$.

ĐS: $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. *HPT* $\Rightarrow 4x^2+\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0$. *Dùng phương pháp hàm số.*

Bài 23. (ĐH 2011A) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 & (1) \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 & (2) \end{cases}$.

ĐS: Ta có: (2) $\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0 \Leftrightarrow xy=1 \vee x^2+y^2=2$.

Hệ có nghiệm: $(1;1), (-1;-1), \left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5};-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

Bài 24. (ĐH 2011D) Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$

ĐS: $HPT \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-x)(2x-y)=m & (1)\\ (x^2-x)+(2x-y)=1-2m & (2)\end{cases}$. *Đặt* $\begin{cases}u=x^2-x,\ u\geq -\dfrac{1}{4}\\ v=2x-y\end{cases}$.

Với $u \geq -\dfrac{1}{4}$, *ta có: (1)* $\Leftrightarrow m(2u+1)=-u^2+u \Leftrightarrow m=\dfrac{-u^2+u}{2u+1}$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{-u^2+u}{2u+1},\ u\geq -\dfrac{1}{4}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị cần tìm là: $m \leq \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Bài 25. (ĐH 2012A) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $(x, y \in R)$.

ĐS: $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 26. (ĐH 2012D) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy+x-2=0\\ 2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0\end{cases}$ $(x, y \in R)$.

ĐS: $(1;1), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right), \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right)$.

Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.

transitung_tv@yahoo.com

